

# Zur Theorie der photographischen Schwärzungsfunktion<sup>1</sup>

Dr. sc. nat. EWALD GERTH

## Einleitung

Die mathematische Formulierung des durch die Schwärzungskurve dargestellten funktionalen Zusammenhanges zwischen der Belichtung einer photographischen Schicht und der bei der Entwicklung hervortretenden Schwärzung - die Schwärzungsfunktion - ist nicht nur eines der wesentlichsten Ziele der Forschung auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie, sie ist auch von großer Bedeutung für die Praxis der meßtechnischen Anwendung der photographischen Schicht als Lichtdetektor.

In Ermangelung einer alle wichtigen sensitometrischen Parameter enthaltenden analytischen Repräsentation der Schwärzungsfunktion hat man sich bisher meist mit der grafischen Darstellung der empirischen Meßdaten, der „Schwärzungskurve“, begnügt, um Schwärzungen in Lichtmengen umzurechnen. Die modernen elektronischen Rechenautomaten erfordern aber für eine solche Umrechnung eine analytische Formulierung, die der realen Schwärzungsfunktion möglichst gut entspricht. Diese Forderung kann allein schon durch eine Polynomausgleichsrechnung mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit erfüllt werden. Damit wird aber die physikalische Ursache für die Formbildung der Schwärzungskurve verschleiert. Die Polynomkoeffizienten gelten nur für eine individuelle Schwärzungskurve und lassen sich nicht ohne weiteres auf andere Schwärzungskurven übertragen. Oft ist aber gerade der Einfluß eines Schichtparameters (Empfindlichkeit, Schichtdicke, Opazität, Korngröße) auf die Form der Schwärzungskurve von Interesse. Hierzu benötigt man physikalisch begründete Formulierungen der Schwärzungsfunktion, welche das wissenschaftliche Interesse an der Aufklärung der funktionalen Zusammenhänge beim photographischen Prozeß sowie das praktische Interesse an einer rechnergerechten Interpolationsformel für Schwärzungen und Lichtmengen gleichermaßen befriedigen.

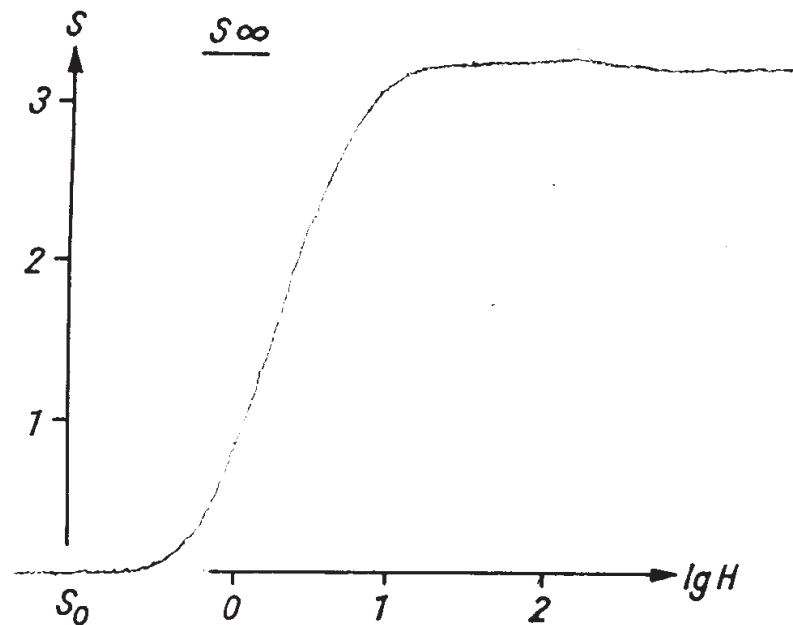
Im folgenden werden Beispiele für phänomenologisch aufgestellte und physikalisch begründete Formeln der Schwärzungsfunktion erörtert. Ohne breit angelegte Formelherleitungen, die in der Spezialliteratur nachzuschlagen sind, wird dem Leser eine Auswahl relativ einfacher Schwärzungsformeln angeboten, die einen Einblick in die funktionalen Zusammenhänge gewähren und schon mit einem mittleren, die wichtigsten Standardfunktionen enthaltenden Taschenrechner numerisch verifizierbar sind.

---

<sup>1</sup> Abstract and comment: [www.ewald-gerth.de/51abs.pdf](http://www.ewald-gerth.de/51abs.pdf) – full article in German scanned from the original publication by the author in 2009 – attached at the end of this article (page 21)

# 1 Phänomenologische Interpolationsformeln der Schwärzungsfunktion

Die photographische Schwärzungskurve hat ihre sigmoide Form (Bild 1)<sup>2</sup> mit einer großen Zahl von Kennlinien physikalischer Übergangsprozesse gemein.



1 Äquidensitometrisch gewonnene Schwärzungskurve eines hart arbeitenden Positivmaterials. Keilkonstante des verwendeten Graukeils:  $K = 0,602 \text{ cm}^{-1}$

Man findet solche Formen beispielsweise bei Röhrenkennlinien, bei der Diffusion und Wärmeleitung, bei der Streuung von Strahlung (unscharfe Abbildung von Kanten), bei der Strahlungstransmission. Anpassungsfähige Funktionen für diese Kurvenform müssen die Bedingung erfüllen, daß sie von der positiven Krümmung über einen Wendepunkt zur negativen Krümmung übergehen und asymptotisch in Parallelen zur Abszisse einmünden, die die Ordinaten der Grenzwerte des Überganges sind. Bei der Schwärzungsfunktion sind diese Grenzwerte gegeben durch die Schleierschwärzung  $S_0$  (Belichtung  $H = 0$ ) und die Sättigungsschwärzung  $S_\infty$  ( $H = \infty$ ).

Zur Vereinfachung wird hier die Schleierschwärzung  $S_0 = 0$  gesetzt, da sie als additive Konstante für die zu betrachtende Kurvenform ignoriert werden kann. Zur grafischen Darstellung der Schwärzungsfunktion als „Schwärzungskurve“ werden üblicherweise logarithmische Koordinaten verwendet. Die Schwärzung ist definiert als der dekadische Logarithmus des Quotienten der Intensitäten von einfallendem und hindurchtretendem Licht

$$S = \lg \frac{E_0}{E} \quad (1)$$

durch eine geschwärzte Schicht. Weiterhin wird zur Abkürzung der dekadische Logarithmus der Lichtmenge  $H = E \cdot t$  ( $E$  Intensität,  $t$  Zeit)  $X = \lg H$  geschrieben.

<sup>2</sup>Die Abbildungen werden einschließlich der Legenden aus dem Originaldruck in der Zeitschrift BILD UND TON übernommen.

## 1.1 Polynomdarstellung

Der mittlere Teil der Schwärzungskurve läßt sich recht gut durch ein Polynom 3. Grades darstellen, dessen Kurve zwischen den Extremwerten einen sigmoiden Verlauf hat:

$$S = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \quad (2)$$

Eine noch günstigere Anpassung erhält man für die inverse Funktion

$$X = b_0 + b_1S + b_2S^2 + b_3S^3. \quad (3)$$

Die Anpassung der Kurve an die experimentellen Daten wird um so besser, je höher der Polynomgrad gewählt wird. Dabei sind die asymptotischen Bereiche der Schwärzungskurve auszunehmen.

Bei einem Polynom  $n$ -ten Grades benötigt man  $n + 1$  Meßstützpunkte entsprechend der Anzahl der Koeffizienten und damit der Parameter der Funktion. Dies ist zugleich die untere Grenze der Anzahl der Meßwerte für eine Polynomausgleichsrechnung. Ist die Anzahl der Meßwerte genau  $n + 1$ , so erfolgt nur eine Interpolation.

Dieses Verfahren erbringt brauchbare Resultate und wird in der Praxis bei der Datenreduktion gemessener Schwärzungskurven vielfach angewendet.

## 1.2 arctan-Funktion, tanh-Funktion, Gaußsches Fehlerintegral

Funktionen, die die oben genannten Grenzbedingungen erfüllen und sigmoide Kurven mit Drehsymmetrie um den Wendepunkt  $X_w$  bei einem Wendepunktanstieg  $\gamma_w$  ergeben, sind die arctan-Funktion

$$S = \frac{S_\infty}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left[ \pi (X - X_w) \gamma_w / S_\infty \right] \right), \quad (4)$$

die tanh-Funktion

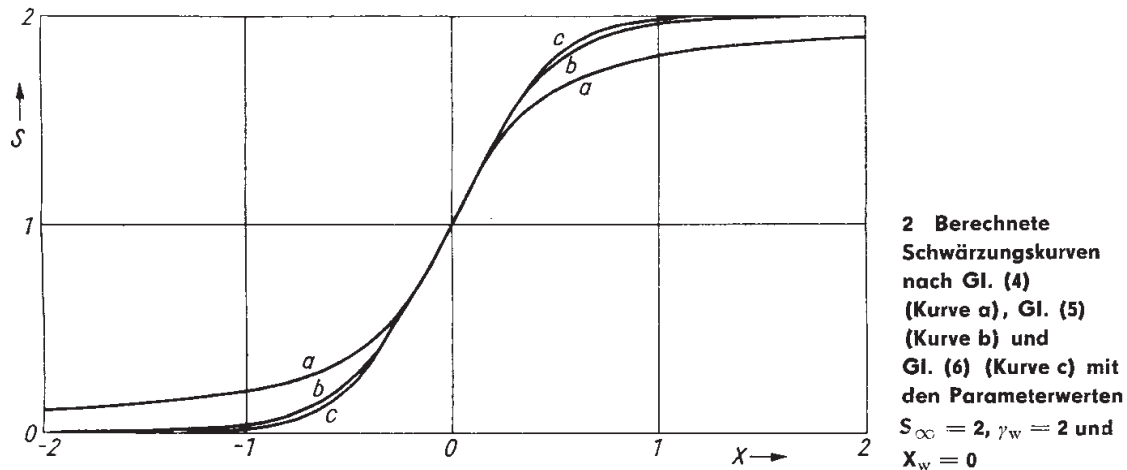
$$S = \frac{S_\infty}{2} \left( 1 + \tanh \left[ 2 (X - X_w) \gamma_w / S_\infty \right] \right) \quad (5)$$

und das Gaußsche Fehlerintegral

$$S = \frac{S_\infty}{2} \left( 1 + \Phi \left[ \sqrt{\pi} (X - X_w) \gamma_w / S_\infty \right] \right) \quad (6)$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du.$$



Die drei Funktionen besitzen einen ähnlichen Aufbau. Sie enthalten die 3 Parameter  $S_\infty$ ,  $\gamma_w$  und  $X_w$  und sind somit jeweils durch drei Punkte der Kurve festgelegt. Bei gleichen Parameterwerten unterscheiden sich die Kurven dieser Funktionen im Durchhang und in der Schulter der Schwärzungskurve (Bild 2).

Relativ schlecht wird die Schwärzungskurve durch die arctan-Funktion wiedergegeben; die tanh-Funktion und das Gaußsche Fehlerintegral, die sich nur geringfügig voneinander unterscheiden, ermöglichen dagegen eine gleichermaßen brauchbare analytische Darstellung der Schwärzungskurve.

Von den phänomenologischen Schwärzungsfunktionen ist das Gaußsche Fehlerintegral besonders häufig verwendet worden [1, 2]. Man ging von der naheliegenden Annahme aus, daß der Schwärzungskurve ein statistisches Gesetz zugrunde liege. Dennoch ist diese Funktion keineswegs besser als etwa Gl. (5) an eine reale Schwärzungskurve anpaßbar; sie besitzt dieser gegenüber sogar noch den Nachteil numerischer Schwerfälligkeit, da sie nur über eine Reihenentwicklung berechnet werden kann. Dagegen können Gl. (4) und Gl. (5) bereits leicht mit einem Taschenrechner berechnet werden.

Eine noch weitergehende Anpassungsfähigkeit als das Gaußsche Fehlerintegral besitzt die unvollständige Gamma-Funktion, die sich besonders bei der Beschreibung der Strahlungstransmission [4] bewährt hat und dort auch physikalisch begründet ist. In bezug auf die Schwärzungskurve wäre sie aber nur eine Interpolationsfunktion.

### 1.3 Einfache rationale Funktionen

Sigmoide Kurven lassen sich schon mit Hilfe einfacher rationaler Funktionen erzeugen. Die Funktion muß so beschaffen sein, daß ein anfänglicher Anstieg allmählich asymptotisch in einen Grenzwert übergeht.

Einfachster Prototyp einer solchen Funktion ist

$$y = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad (7)$$

und bei logarithmischer Abszissentheilung mit  $X = \lg H$  und des Wendepunktanstieges  $\gamma_w$  ergibt sich

$$S = S_\infty \left( 1 - \left[ 1 + \exp(4(X - X_w)(\ln 10)\gamma_w/S_\infty) \right]^{-1} \right). \quad (8)$$

Diese Formel kommt physikalisch begründeten Schwärzungsfunktionen bereits sehr nahe. Mit  $n = 4\gamma_w(\ln 10)/S_\infty$  und  $\varepsilon = \exp[4\gamma_w X_w(\ln 10)/S_\infty]$  erhält man eine Funktion

$$S = S_\infty \left( 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon H^n} \right), \quad (9)$$

die sich auch aus dem Ansatz einer Korngrößenverteilungsfunktion gemäß einer Exponentialfunktion ergibt.  $\varepsilon$  ist hierin ein Empfindlichkeitskoeffizient und  $n$  ein Exponent, der in [5] als „Keimordnungszahl“ eingeführt wurde. Die Größe  $n$  nimmt nach [5, 6] Werte zwischen  $1 \leq n \leq 4$  an. Kleine Werte von  $n$  entsprechen hochempfindlichen und „flachen“, dagegen große Werte weniger empfindlichen und „steilen“ Photoschichten.

Gl. (8) beschreibt besonders gut das Gebiet des Durchhanges der Schwärzungskurve, und zwar um so besser, je kleiner  $H$  ist. Für kleine Werte von  $H$  gilt nämlich eine Beziehung

$$S = S_\infty \varepsilon H^n, \quad (10)$$

die schon bei MEES [1] angegeben ist und später von DE VAUCOULEURS [6] in großem Umfang zur Auswertung photographischer Sternaufnahmen benutzt wurde.

Gl. (9) läßt sich auf leichte Weise ergänzen, womit die Anpassungsfähigkeit an reale Schwärzungskurven verbessert wird, indem man den Nenner nur als den Anfang einer Potenzreihe betrachtet, deren Gliederzahl beliebig vermehrt werden kann. Die vom Verfasser durchgeführten Untersuchungen dieser Möglichkeit zeigten, daß die Approximation mit einem Polynom 3. Grades für die meisten praktischen Fälle ausreicht:

$$S = S_\infty \left( 1 - \frac{1}{1 + a_1 H^n + a_2 H^{2n} + a_3 H^{3n}} \right) \quad (11)$$

Gl. (10) ist dem einfachen Polynomausgleich nach Gl. [2, 3] vorzuziehen, da hiermit auch die Grenzbedingungen für  $H \rightarrow 0$  und  $H \rightarrow \infty$  zwanglos erfaßt sind. Der Polynomausgleich zur Bestimmung der Koeffizienten läßt sich an der umgestellten Gleichung vornehmen:

$$a_1 + a_2 H^n + a_3 H^{2n} = \frac{S}{H^n(S_\infty - S)}. \quad (12)$$

Die Anpassung ist bei diesem Verfahren so gut, daß man nur Abweichungen der angepaßten Kurve vom gemessenen Original in den Grenzen der Meßgenauigkeit findet. Eine grafische Demonstration dieses Sachverhaltes erübrigt sich, da nur übereinstimmende Kurven abzubilden wären.

Gl. (11) wurde zunächst nur als phänomenologische Interpolationsformel aufgestellt. Sie entspricht aber gleichzeitig den realen physikalischen Gegebenheiten und zeichnet sich durch große Einfachheit aus. Sind die Koeffizienten  $a_i$  erst einmal auf anderem Wege ermittelt, so kann jede Schwärzung zur Belichtung  $H$  mit Taschenrechnern – sogar ohne Standardfunktionen – berechnet werden.

Trotz der großen Anpassungsfähigkeit von Gl. (11) ist eine physikalische Einsicht in die funktionalen Zusammenhänge der Schwärzungsfunktion nicht gegeben. Die Koeffizienten sind keine signifikanten physikalischen Parameter.

## 2 Physikalisch begründete Ansätze für die Herleitung der Schwärzungsfunktion

Eine alle Einflußgrößen umfassende analytische Darstellung der Schwärzungskurve wäre das zusammengefaßte Ergebnis der gesamten bisherigen Forschung auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Photographie. Im Hinblick auf die Kompliziertheit des photographischen Prozesses wird ein solches Ziel wohl in absehbarer Zeit nicht zu erreichen sein. So muß man bei der Modellierung des realen Objekts nach sinnvollen Vereinfachungen suchen, die den physikalischen Sachverhalt unter den jeweiligen Bedingungen auf die Einflußgrößen zu reduzieren gestatten, welche bei der Wiedergabe der wesentlichsten Züge des funktionalen Zusammenhanges berücksichtigt werden müssen. Die wichtigsten Einflüsse auf die Form der Schwärzungskurve sind in ihrer Rangfolge gegeben durch

1. die Mikroprozesse im Kristallgitter des Silberhalogenids bei der Belichtung,
2. den Strahlungstransport durch die Emulsionsschicht bei der Belichtung,
3. die Korngrößenverteilung (und ähnliche durch die Emulsionsherstellung bedingte Größen, z. B. Reifkeimverteilung),
4. die Form der entwickelten Silberkörner,
5. die Entwicklung und Verarbeitung der Photoschicht,
6. die Nachbehandlung der entwickelten Schicht (Verstärken, Färben, Bleichen, Ätzen).

Die Punkte 5. und 6. sollen im folgenden nicht betrachtet werden. Bei allen Ansätzen zur Herleitung der Schwärzungsfunktion wird eine homogene Schichtstruktur vorausgesetzt.

### 2.1 Statistische oder reaktionskinetische Behandlung des photographischen Prozesses?

Unterschiede in den Auffassungen der verschiedenen Autoren von Theorien der Schwärzungsfunktion beziehen sich besonders auf die Mikroprozesse im Kristallgitter des Silberhalogenids. Die großen Schwierigkeiten, die sich der direkten Beobachtung der Mikrovorgänge im Kristallgitter des Silberhalogenids entgegenstellen, lassen der Hypothese und damit der Theorie breiten Spielraum (s. Einführung zu [8]).

Die heutigen Vorstellungen über die Mikroprozesse sind von MITCHELL [9] formuliert worden. Zusammenfassende Darstellungen hierüber wurden auch in BILD UND TON [8, 10] gegeben.

Im vorliegenden Beitrag wird dieses weite Gebiet nicht behandelt und diesbezüglich auf die Literatur verwiesen. Es soll jedoch erwähnt werden, daß es zwei theoretische Grundrichtungen zur analytischen Darstellung der Mikroprozesse gibt:

1. die reaktionskinetische Theorie,
2. die statistische Theorie.

Der älteste Versuch, die Schwärzungskurve mit Hilfe der Reaktionskinetik eines mehrstufigen Systems zu erklären, stammt von Schaum [11] aus dem Jahre 1908.

Den Anfang einer statistischen Deutung machte 1922 Silberstein [12]. Es gab eine Reihe von Nachfolgearbeiten, worüber in [13] berichtet wurde. Eine neuere statistische Behandlung der Röntgenschwärzungskurve wurde von Volke [14] veröffentlicht, die gleichzeitig repräsentativ für die statistische Theorie schlechthin ist.

Vom Verfasser wurde die reaktionskinetische Theorie aufgegriffen und in einigen Arbeiten [8, 13, 15, 16, 17] als Grundlage für die analytische Behandlung der Schwärzungsfunktion genommen.

Es soll hier kein abschließendes Urteil über beide Richtungen in der Theorie der Schwärzungsfunktion gegeben werden, die sich hinsichtlich ihres Ansatzes und ihrer Methodik unterscheiden, aber den gleichen Gegenstand beschreiben, also auch ineinander überführbar sein müssen. Das Bindeglied zwischen beiden theoretischen Richtungen ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dennoch gibt es einen wichtigen Grund, für die analytische Darstellung der Schwärzungskurve die reaktionskinetische Beschreibung des photographischen Prozesses zu bevorzugen: Der Charakter des in der Zeit ablaufenden Prozesses ist hierbei schon im Ansatz enthalten. Man kann den Bewegungsablauf des Prozesses mit einem Laufbildfilm veranschaulichen, dessen augenblicklicher Zustand das statische, einzelne Bild ist.

Dagegen wird in der statistischen Theorie, die meistens von der Trefferwahrscheinlichkeit der Silberhalogenidkörner für Licht- oder Strahlungsquanten ausgeht, die Zeit entweder ignoriert [14], oder es muß neben der Quanten- und Kornstatistik auch noch eine unabhängige Zeitstatistik durchgeführt werden, die dem Prozeßablauf mit den gegenseitigen Abhängigkeiten nicht Rechnung tragen kann. Die statistische Theorie liefert daher keine Erklärung für den SCHWARZSCHILD-Effekt, der bei der kinetischen Theorie schon aus einer Plausibilitätsbetrachtung folgt [8, 18], sich darüber hinaus aber auch exakt herleiten läßt [13, 17].

## 2.2 Das *Schwarzschild*-Produkt $Et^p$ – die reaktionskinetisch bedingte unabhängige Variable der Schwärzungsfunktion

In [13, 17] wurde gezeigt, daß das von SCHWARZSCHILD als unabhängige Variable eingeführte Potenzprodukt  $Et^p$  ( $E$  Belichtungsintensität,  $t$  Belichtungszeit,  $p$  SCHWARZSCHILD-Exponent) sich als das Ergebnis der mehrstufigen kinetischen Reaktion des Keimaufbaus in den Silberhalogenidkristallen der Emulsion erklären läßt. In der in [18] bereits vertretenen erweiterten Form  $\varepsilon(Et^p)^n$  ist  $n$  die Reaktionsordnung des Keimaufbaus, die „Keimordnungszahl“, und  $\varepsilon$  ein Empfindlichkeitskoeffizient, der neben der spektralen Sensibilisierung des Kristallgitters für den Photoeffekt von der Korngröße, der Reifkeim- und Fallkonzentration, der Beweglichkeit der Ladungsträger usw. abhängt. Der Ausdruck

$$z = \varepsilon(Et^p)^n \quad (13)$$

kann als die mittlere Besetzungszahl eines Silberhalogenidkorns an Entwicklungskeimen gedeutet werden. Im folgenden wird das unabhängige SCHWARZSCHILDsche Potenzprodukt mit

$$H = Et^p \quad (14)$$

bezeichnet.  $H$  ist die bei der Belichtung effektive Lichtmenge (bei Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes  $H = Et$ ).

Die Variation des Schwarzschild-Produktes über einen größeren Belichtungsbereich wird nach [8, 13, 18] durch die Beziehung

$$H = [(1 + aE)^b - 1]t^p \quad (15)$$

beschrieben, in der  $a$  ein Empfindlichkeitskoeffizient und  $b$  ein Exponent ist, der sich nach seiner reaktionskinetischen Herleitung zu  $b = 1/2$  ergibt, aber in der Praxis zwischen  $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$  liegt [19].

In dem Empfindlichkeitskoeffizienten  $E$  ist das Kornvolumen  $V$  mit enthalten. Zur Berücksichtigung der Korngrößenverteilung ist es notwendig, die Abhängigkeit der Empfindlichkeit vom Kornvolumen analytisch zu fassen. Hierzu dient die einfache Beziehung

$$\varepsilon = \eta V. \quad (16)$$

$\eta$  ist ein Koeffizient für die Empfindlichkeitsdichte des Kristalls mit dem Volumen  $V$ .

Die Proportionalität der Empfindlichkeit zum Kornvolumen ist ein experimentelles Ergebnis. Es läßt sich so deuten, daß der Photoeffekt im gesamten Silberhalogenidkorn wirksam ist, so daß die Reaktionswahrscheinlichkeit für den Keimaufbau mit dem Kornvolumen anwächst. Bei großen Körnern beobachtet man auch eine Empfindlichkeitszunahme mit der Kornoberfläche, was mit der Keimanlagerung auf der Kornoberfläche und dem begrenzten Einzugsbereich der Ladungsträger in der Umgebung der Keime zusammenhängt. Im folgenden wird von diesem nicht erheblichen Effekt abgesehen und die durchgängige Abhängigkeit der Empfindlichkeit vom Kornvolumen vorausgesetzt. Durch Verwendung von  $H$  als unabhängige Variable in der Entwicklungskeimbeseitzungszahl des Kornes

$$z = \eta V H^n \quad (17)$$

werden die Formulierungen der Schwärzungsfunktion bei Berücksichtigung des wesentlichsten formbestimmenden Einflusses der mehrstufigen Reaktion des Keimaufbaus auf die Schwärzungskurve in ihrer Struktur vereinfacht.

Diese Darstellung läßt auch genügend Freiraum für weitere Verfeinerungen der Belichtungswirkungen, wie sie beispielsweise für die Berechnung von Schwärzungskurven bei Doppelbelichtungseffekten [13] eingeführt werden müssen.

### 2.3 Der Zusammenhang zwischen Kornflächendichte und Schwärzung

Die entwickelten Silberkörner einer photographischen Schicht sind in derselben ungeordnet hinsichtlich ihrer Größe und Lage verteilt. Die Korndichte nimmt von der Oberfläche der Schicht nach größeren Tiefen hin ab auf Grund der Schwächung der effektiven Intensität des Lichtes durch den Strahlungstransport bei der Belichtung. Jedes Korn liefert entsprechend seiner Projektionsfläche  $f$  einen Schwärzungsbeitrag. Betrachtet man zunächst Körner gleicher Größe, so könnte man sich die Schicht wabenartig aufgeteilt denken. Manche Zellen sind mit einem oder mehreren Körnern besetzt und tragen damit in gleicher Weise durch Sperrung des Lichtdurchganges zur Schwärzung bei.



Für die Transmission des Lichtes und damit die Transparenz der Schicht sind *nur* die freigebliebenen Zellen maßgeblich, für die nach der POISSONSchen Wahrscheinlichkeit der Zellenbesetzung ( $z$  Zellenbesetzungszahl,  $\bar{z}$  mittlere Zellenbesetzungszahl)

$$W(z) = \frac{\bar{z}^z e^{-\bar{z}}}{z!} \quad (18)$$

und mit  $z = 0$

$$W(0) = e^{-\bar{z}} \quad (19)$$

gilt. Wendet man die Definition der Schwärzung Gl. (1) auf die Transmissionswahrscheinlichkeit Gl. (19) an, so erhält man

$$S = \lg \frac{1}{e^{-\bar{z}}} = \bar{z} \lg e. \quad (20)$$

Die mittlere Zellenbesetzung  $\bar{z}$  ist gegeben durch die Kornflächendichte  $\varrho$  multipliziert mit der Projektionsfläche  $f$ . Hieraus folgt die bekannte NUTTINGSche Schwärzungsformel [20], die einen linearen Zusammenhang zwischen der Kornflächendichte  $\varrho$  und der Schwärzung  $S$  ausdrückt.

## 2.4 Der Zusammenhang zwischen Entwicklungskeimbesetzungszahl und Kornflächendichte

In entsprechender Weise wie im vorigen Abschnitt kann auch ein einzelnes Silberhalogenidkorn der Photoschicht als Zelle einer POISSONSchen Verteilungsfunktion Gl. (18) aufgefaßt werden. Die Zellenbesetzungszahl ist dann die Anzahl der auf dem Korn durch die kinetische Reaktion des Keimaufbaus entstandenen Entwicklungskeime. Da nur die Silberhalogenidkörner entwickelt werden, die mindestens *e i n e n* Keim enthalten, ist die Entwicklungswahrscheinlichkeit  $W_e$  gegeben durch das Komplement der Wahrscheinlichkeit der Nichtentwicklung  $W(0)$  zur Gewißheit 1:

$$W_e = 1 - W(0) = 1 - e^{-\bar{z}}. \quad (21)$$

Die Kornflächendichte für eine bestimmte Korngrößenklasse  $\varrho(V)$  beträgt dann mit einer Sättigungsdichte  $\varrho_\infty(V)$  unter Verwendung der Beziehung (17)

$$\varrho(H, V) = \varrho_\infty(V) \left(1 - e^{-\eta V H^n}\right). \quad (22)$$

Für Körner gleicher Größe kann man Gl. (22) mit der von NUTTING gefundenen Proportionalität zwischen Kornflächendichte und Schwärzung auch als Schwärzungsfunktion schreiben:

$$S(H) = S_\infty \left(1 - e^{-\eta V H^n}\right). \quad (23)$$

Diese Beziehung entspricht der SVEDBERGSchen Schwärzungsformel [21]. Mit der durch den Exponenten  $n$  eingefügten Erweiterung besitzt diese Formel bereits eine gute Anpassungsfähigkeit an reale Schwärzungskurven im Gebiet des Durchhanges bis zu mittleren Schwärzungen. Die Schulter der Schwärzungskurve wird wegen des Einflusses der Korngrößenstreuung schlecht approximiert.

Bezogen auf ein „Element“  $dVdx$  der Korngröße und der Schichtdicke ist Gl. (23) eine sogenannte „Elementarschwärzungskurve“ für den Schwärzungsanteil  $dS$ :

$$dS = N \left( 1 - e^{-\eta V H^n(x)} \right) dV dx. \quad (24)$$

$N$  ist ein Normierungsfaktor, der die Bedeutung der Sättigungsschwärzung einer Elementarschicht der Dicke  $dx$  und der Korngrößenstreuung  $dV$  hat.

## 2.5 Der Einfluß der Korngrößenstreuung

Die Silberhalogenidkristalle erfahren bei der Emulsionsherstellung ein unterschiedliches Wachstum. Auch die Kristallisation ist als ein kinetischer Prozeß mit Hin- und Rückreaktionen aufzufassen, bei dem – analog zur Nebelbildung – die größeren Kristalle auf Kosten der kleineren wachsen. Experimentell wurde gefunden [22], daß die Korngrößen annähernd nach einer logarithmischen Normalverteilung streuen. Dies zeigt auch eine neuere Arbeit über elektronenmikroskopische Untersuchungen zur Teilchengrößenverteilung von Kieselolen [23].

Man kann die logarithmische Normalverteilung durch eine Summe von wenigen Exponentialfunktionen annähern, die dem Typ der Lösung eines Systems kinetischer Reaktionsgleichungen entspricht. Eine brauchbare Approximation erreicht man bereits mit einer Differenz zweier Exponentialfunktionen<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Anmerkung des Verfassers bei der Textverarbeitung im April 2010:

Die Darstellung der logarithmischen Normalverteilung durch eine Differenz zweier Exponentialfunktionen wurde 1978 tentativ auf der Grundlage der Statistik angesetzt. Man kann hierin schon das Produkt zweier POISSONScher Wahrscheinlichkeiten erkennen:

$$\omega(V) = e^{-\alpha_1 V} \left( 1 - e^{-(\alpha_2 - \alpha_1)V} \right) = \omega_1 \cdot \omega_2.$$

Teilt man die Korngrößenverteilungsfunktion in diskrete Größenklassen des Kornvolumens  $\Delta V$  auf, dann kann man die Körner in jeder Klasse als mit der Kornoberfläche  $F = \alpha_2 - \alpha_1$  aus der Lösungsphase gewachsen auffassen, was nach der POISSONSchen Verteilungsfunktion (18) der Zellenbesetzung  $z = 1 \cdot \dots \cdot \infty$  mit  $\omega_2 = 1 - e^{-FV}$  entspräche.

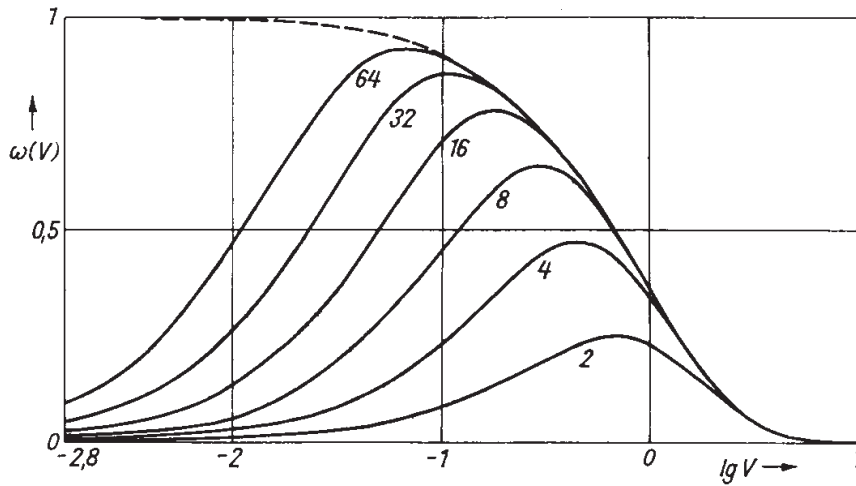
Da das Kornvolumen nicht für alle Zellenklassen mit  $z \rightarrow \infty$  anwachsen kann, müssen in Richtung größerer Kornvolumina mehr und mehr Zellen unbesetzt bleiben. Dies wird erreicht durch die multiplikativ überlagerte Wahrscheinlichkeit  $\omega_1 = e^{-\alpha_1}$  der unbesetzten Zellen mit der Besetzungszahl  $z = 0$ , wodurch sich bei logarithmischer Abszissenteilung die charakteristische – symmetrische – Glockenform in dem Bereich  $F = 8 \cdot \dots \cdot 15$  ergibt.

Es erhebt sich nun die Frage nach der Bedeutung der Funktion  $F$ . Wenn es sich dabei um die Kornoberfläche einer Kugel mit dem Kornradius  $r$  handelte, so würde diese Größe  $4\pi r^2$  betragen; daraus folgt  $F = 4\pi = 12.56637$ , welcher Wert innerhalb der geforderten Grenzen von 8 bis 16 liegt. Aber auch bei anderen Kornformen wächst die Oberfläche mit dem Quadrat des Kornradius. Somit kann  $F$  in Abhängigkeit von der Kornform oder der Kristalltracht auch andere Werte in der nahen Umgebung von  $4\pi$  annehmen.

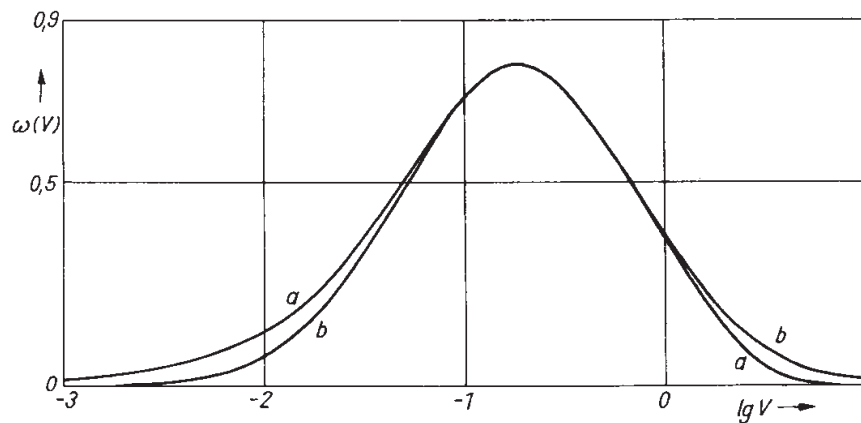
Ein besonderer Vorteil des statistischen Ansatzes besteht darin, daß man bei einer Verteilungsfunktion mit zwei Exponentialgliedern nur noch *e i n e n* Empfindlichkeitskoeffizienten hat, womit die Formeln (26) bis (30) vereinfacht werden. Mehrere Glieder von Exponentialfunktionen können aber dennoch auftreten, wenn unterschiedlich gereifte Emulsionen gemischt werden.

Eine exakte Herleitung der Korngrößenverteilungsfunktion erhält man erst bei Berücksichtigung des zeitlichen Verlaufes der Aufbau- und Abbaureaktionen der Körner als reaktionskinetischer Prozeß. Die Formulierung führt auf nichtlineare Integrodifferentialgleichungen von der Art, wie sie bei der Behandlung des Strahlungstransports auftreten (siehe [www.ewald-gerth.de/42.pdf](http://www.ewald-gerth.de/42.pdf)).

$$\omega(V) = e^{-\alpha_1 V} - e^{-\alpha_2 V}. \quad (25)$$



**3 Schar von Korngrößenverteilungskurven nach Gl. (25) mit  $\alpha_2$  als Parameter**



**4 Vergleich der Korngrößenverteilungskurven als Differenz zweier Exponentialfunktionen (Kurve a) und als logarithmische Normalverteilung (Kurve b). Parameter der Kurve a:**

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 16.$   
**Kurve b:**  $\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$   
 $\omega_0 = 0,783,$   
 $x_0 = -0,724,$   
 $\sigma = 0,590$

Bild 3 zeigt eine Schar von Verteilungskurven nach Gl. (25) in Koordinaten mit logarithmischer Abszissenteilung. Die Kurven für  $\alpha_1 = 1$  und  $\alpha_2 = 1 \cdots 16$  besitzen eine hinreichend symmetrische Form, die der GAUSSschen Glockenkurve nahekommt.

In Bild 4 ist die Kurve für  $\alpha_2 = 16$  zusammen mit der Kurve der logarithmischen Normalverteilung eingezeichnet, die in der Umgebung des Maximums eine Übereinstimmung ergibt.

Nur in den Bereichen sehr großer und sehr kleiner Körner treten größere Abweichungen zwischen beiden Verteilungskurven auf. Beide Abweichungen lassen sich durch Addition weiterer Funktionen nach Art von Gl. (25) darstellen, also durch eine Exponentialreihe mit höherer Anzahl von Gliedern. Es wird weiter unten gezeigt, daß geringfügige Veränderungen der Form der Korngrößenverteilungskurve einen kaum merklichen Einfluß auf die Form der Schwärzungskurve haben, so daß man sicher mit zwei Exponentialfunktionen nach Gl. (25) auskommt, ja daß der wesentliche formbestimmende Einfluß der Korngrößenstreuung bereits mit nur einer Exponentialfunktion erfaßt wird:

$$\omega(V) = e^{-\alpha V} \quad (26)$$

Gl. (26) sagt aus, daß die Anzahl der Körner mit abnehmender Korngröße bis zu einem bestimmten Wert bei der Korngröße  $V = 0$  (hier = 1 gesetzt) zunimmt<sup>4</sup>. Dies entspricht einem Wachstum der Kristalle aus der Lösungsphase ohne Abbau der kleineren Kristalle. Die kleinen Körner haben für die Schwärzung in dreifacher Hinsicht keine große Bedeutung:

1. ist ihre Empfindlichkeit gering,
2. tragen sie nur wenig zur Schwärzung bei,
3. ist ihr Anteil an der Verteilung wegen der logarithmischen Abszissenteilung klein.

Die Form der Schwärzungskurve wird im wesentlichen durch die großen Körner bestimmt. Erst im Bereich der Schulter kommen mehr und mehr die kleineren Körner zur Geltung. Der Einfluß der Korngrößenstreuung wird durch ein Integral

$$S(H) = S_\infty \left( 1 - N \int_0^\infty V^\kappa \omega(V) e^{-\eta V H^n} dV \right) \quad (27)$$

analytisch formuliert, das eine Summation der Schwärzungsanteile aller Korngrößenklassen wiedergibt ( $N$  Normierungsfaktor).  $\kappa$  ist ein von der Gestalt des entwickelten Silbers abhängiger „Formexponent“. Jedes entwickelte Korn liefert einen Schwärzungsbeitrag, der einer Potenz des Volumens  $V^\kappa$  proportional ist. Bei kugelförmiger Gestalt des entwickelten Silberkorns ist der Schwärzungsbeitrag der Projektionsfläche, also  $V^{2/3}$ , proportional. Solche Silberkörner entstehen bei halbphysikalischer Entwicklung, wenn das gesamte Silber des Silberhalogenidkorns am Entwicklungskeim niedergeschlagen wird. Bei extrem physikalischer Entwicklung erfolgt der Silberniederschlag nach dem Fixieren aus der Lösungsphase an den Keimen; der Schwärzungsbeitrag wird vom Kornvolumen mit  $\kappa = 0$  unabhängig.

Die Korngrößenverteilung wirkt sich aber bei der Belichtung als Empfindlichkeitsverteilung aus. Bei chemischer Entwicklung entsteht ein schwammiges Silberknäuel [22], dessen Lichtabsorption im Extremfall mit der Silbermasse, also  $V^1$ , anwächst. Normalerweise wird der Formexponent irgendwo zwischen den Grenzen  $2/3 \leq \kappa \leq 1$  liegen. Die chemische Entwicklung erzeugt zwar eine gröbere Kornstruktur, bewirkt aber eine höhere Effektivität der Schwärzungsabdeckung als die physikalische Entwicklung [22].

Die Integration von Gl. (27) ist mit beliebigen Korngrößenverteilungsfunktionen möglich. Es ergibt sich die Darstellung der Schwärzungsfunktion als Faltungsintegral der Elementarschwärzungsfunktion und der logarithmischen Korngrößenverteilung<sup>5</sup>.

Wählt man für die Korngrößenverteilung eine Exponentialfunktion nach Gl. (26), so liefert die Integration überraschenderweise eine rationale Funktion, die sehr große Ähnlichkeit mit der phänomenologischen Funktion Gl. (9) hat,

---

**<sup>4</sup>Anmerkung des Verfassers bei der Textverarbeitung im April 2010:**

Nach der statistischen Auffassung handelt es sich hierbei um eine POISSONverteilung mit der Zellenbesetzungszahl  $z = 0$ , welche aus einer Gleichverteilung für alle Korngrößenklassen zunehmend Lücken mit wachsender Korngröße freigibt.

<sup>5</sup>Dieser interessante Zusammenhang wurde 1978 bei den Formelherleitungen festgestellt, wurde aber vom Verfasser nicht weiter verfolgt.

$$S = S_\infty \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \frac{\eta}{\alpha} H^n \right)^{\kappa+1}} \right), \quad (28)$$

d. h., für  $\kappa = 0$  und  $\frac{\eta}{\alpha} = \varepsilon$  in diese übergeht. Der Formexponent  $\kappa$  macht Gl. (28) anpassungsfähiger als Gl. (9).

Besser trägt der realen Korngrößenverteilung die Kombination zweier Exponentialfunktionen gemäß Gl. (25) Rechnung, womit man als Schwärzungsfunktion

$$S = S_\infty \left( 1 - \frac{(\alpha_1 \alpha_2)^{\kappa+1}}{\alpha_1^{\kappa+1} - \alpha_2^{\kappa+1}} \left[ \frac{1}{(\alpha_1 + \eta H^n)^{\kappa+1}} - \frac{1}{(\alpha_2 + \eta H^n)^{\kappa+1}} \right] \right) \quad (29)$$

erhält. Die Verwendung weiterer Exponentialglieder bereitet keine Schwierigkeiten, da der Summe der Exponentialfunktionen der Korngrößenverteilung eine Summe der rationalen Funktionen in der Schwärzungsfunktion entspricht. Eine Vermehrung der Anzahl der Glieder ist aber kaum erforderlich. Gl. (29) ist bereits eine brauchbare Beziehung zur Beschreibung der Röntgenschwärzungskurve, bei der nur die Korngrößenverteilung, nicht aber der Schichtdickeneffekt die Kurvenform beeinflusst. Bei der Röntgenschwärzungskurve ergibt sich eine weitere Vereinfachung, da wegen des Überspringens aller Reaktionsstufen bis zum entwickelbaren Keim, bei einem Quantentreffer  $n = 1$  und wegen angewendeter extrem chemischer Entwicklung  $\kappa = 1$  ist,

$$S = S_\infty \left[ 1 - \frac{1 + \frac{\eta}{\alpha_1 + \alpha_2} H}{\left( 1 + \frac{\eta}{\alpha_1} H \right)^2 \left( 1 + \frac{\eta}{\alpha_2} H \right)^2} \right]. \quad (30)$$

Die Koeffizienten der Korngrößenverteilung  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  bilden mit dem Empfindlichkeitskoeffizienten  $\eta$  Quotienten. Empfindlichkeit und Korngröße sind bei der Formulierung der Schwärzungsfunktion als Einheit zu betrachten.

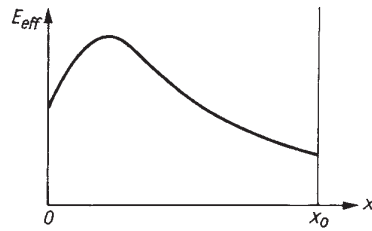
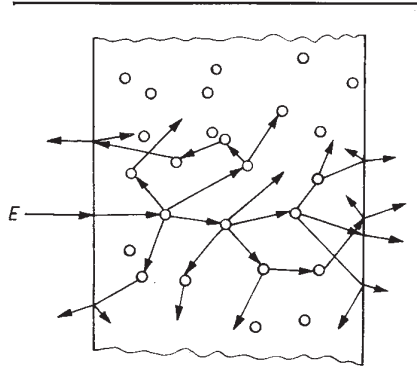
## 2.6 Der Einfluß des Schichtdickeneffektes

Bei der Belichtung der trüben Emulsionsschicht erfährt das Licht Absorptionen und Streuungen an den Kristallen der Emulsion sowie Reflexionen an den Grenzflächen der Schicht. Das wirkt sich so aus, daß durch die Absorption die effektive Intensität mit wachsender Schichttiefe nach einer Exponentialfunktion (LAMBERTSches Gesetz) abnimmt, während durch die Streuung ein Teil des Lichtes die Schicht wieder auf der Seite des Lichteinfalls verläßt (diffuse Rückstreuung), wodurch sich eine intensitätsverdünnte Zone unterhalb der Eintrittsfläche und eine maximale Intensität in einer gewissen Schichttiefe ausbilden. Auch die Grenzflächen tragen dazu bei, daß das Licht wieder in die Schicht zurückgeworfen wird und so zu einer Erhöhung der effektiven Intensität in einer mittleren Schichttiefe führt (Bild 5).

Die Funktion der effektiven Intensität  $E_{\text{eff}}$  in Abhängigkeit von der Schichttiefe  $x$  findet man durch Lösung der Strahlungstransportgleichung [3]. Nach METZ kann diese Funktion hinreichend genau durch eine Summe zweier Exponentialfunktionen angenähert werden.

In weiterer Näherung ist jedoch die Streuung des Lichtes an den Kristallen und den Grenzflächen zu vernachlässigen und ein exponentieller Verlauf der Intensität nach dem Lambertschen Gesetz anzunehmen:

$$E_{\text{eff}} = E e^{-\frac{D}{x_0} x}. \quad (31)$$



5 Veranschaulichung des Streuvorganges an den Silberhalogenidkörnern beim Durchgang des Lichtes durch die trübe Emulsionsschicht. Funktionsverlauf der effektiven Intensität  $E_{\text{eff}}$  des Lichtes in Abhängigkeit von der Schichttiefe  $x$

Die Größe  $D$  ist hierin die optische Dichte der trüben Emulsionsschicht, deren Schwärzung  $S_D = D \lg e$  ist.

Das Lambertsche Gesetz gilt um so besser, je mehr die Absorption überwiegt, beispielsweise bei angefärbten Emulsionsschichten.

Aus Gründen einer einfachen Integration wird im folgenden der Strahlungstransport nur durch Gl. (31) berücksichtigt. Die Erweiterung von Gl. (31) auf mehrere Exponentialglieder erfordert numerische Integrationen.

Der Schichtdickeneffekt wird durch Integration der Reduktionswahrscheinlichkeitsfunktion (normierte Elementarschwärzungskurve)  $w(E, t)$  mit der schichttiefenabhängigen Lösung der Strahlungstransportgleichung  $\varphi(x)$  analytisch formuliert:

$$S = S_{\infty} \left( 1 - N \int_0^{x_0} w(E\varphi(x), t) dx \right) \quad (32)$$

Die alleinige Behandlung des Schichtdickeneffektes mit dem Lambertschen Gesetz ergibt ohne Berücksichtigung der Korngrößenverteilung (d. h. bei Gleichverteilung der Korngrößen) eine Exponentialintegralfunktion [24], also eine relativ komplizierte Funktion, deren Werte aus einer Tabelle entnommen oder durch Reihenentwicklung ermittelt werden müssen. Paradoxerweise führt die Berücksichtigung der Korngrößenverteilung in Gestalt einer Summe von Exponentialfunktionen zu einer Vereinfachung der analytischen Formulierung der Schwärzungsfunktion, die sich dann allein durch Standardfunktionen ausdrücken läßt<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Es handelt sich dabei um den gleichen Effekt, den man bei Integraltransformationen - wie zum Beispiel bei der FOURIER-Transformation oder der LAPLACE-Transformation - findet.

Integriert man zunächst nach Gl. (32) die Schwärzungsfunktion Gl. (28), in der die Korngrößenverteilung durch eine Exponentialfunktion Gl. (26) berücksichtigt ist, so erhält man mit dem Schwarzschild-Produkt  $H = Et^p$  und der Abkürzung  $\varepsilon = \frac{\eta}{\alpha}$  für extrem physikalische Entwicklung mit  $\kappa = 0$

$$S = \frac{S_\infty}{nD} \ln \frac{1 + \varepsilon H^n}{1 + \varepsilon H^n e^{-nD}} \quad (33)$$

und für extrem chemische Entwicklung mit  $\kappa = 1$

$$S = \frac{S_\infty}{nD} \left( \ln \frac{1 + \varepsilon H^n}{1 + \varepsilon H^n e^{-nD}} + \frac{1}{1 + \varepsilon H^n e^{-nD}} - \frac{1}{1 + \varepsilon H^n} \right). \quad (34)$$

Die Integration ist nur für ganzzahlige Werte des Formexponenten  $\kappa$  elementar ausführbar; im Falle gebrochener Werte muß man zu numerischen Integrationen greifen. Da im allgemeinen die chemische Entwicklung angewendet wird, kann man den Formexponenten ohne größeren Fehler mit  $\kappa = 1$  ansetzen. Mit  $\kappa = 0$  ergibt sich aber die für viele analytische und numerische Berechnungen noch bequemere Schwärzungsformel (33), in der die wesentlichsten Einflüsse der Korngrößenverteilung und des Schichtdickeneffektes bereits berücksichtigt sind.

Gl. (33) und Gl. (34) können auch als Grundformen für die Erweiterung der Korngrößenverteilung auf mehrere Exponentialglieder benutzt werden, wobei in der Schwärzungsfunktion die additive Struktur der Exponentialreihe erhalten bleibt. So erhält man bei einer Korngrößenverteilung Gl. (25) mit

$$\frac{\eta}{\alpha_1} = \varepsilon_1 \text{ und } \frac{\eta}{\alpha_2} = \varepsilon_2 \text{ sowie } \kappa = 0$$

$$S = \frac{S_\infty}{nD} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2} \ln \frac{1 + \varepsilon_1 H^n}{1 + \varepsilon_1 H^n e^{-nD}} + \frac{1}{1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1} \ln \frac{1 + \varepsilon_2 H^n}{1 + \varepsilon_2 H^n e^{-nD}} \right) \quad (35)$$

und bei Integration mit  $\kappa = 1$  und Wiedereinführung des Exponenten  $\kappa$

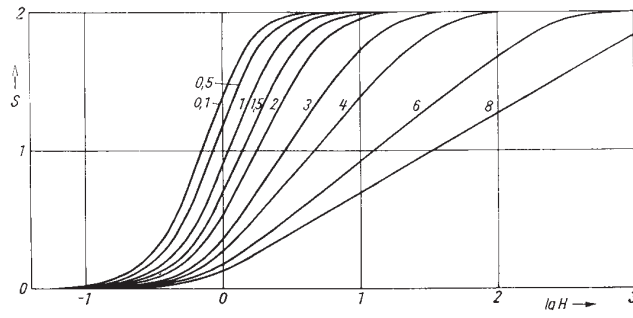
$$S = \frac{S_\infty}{nD} \left[ \frac{1}{1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)^{\kappa+1}} \left( \ln \frac{1 + \varepsilon_1 H^n}{1 + \varepsilon_1 H^n e^{-nD}} + \frac{1}{(1 + \varepsilon_1 H^n e^{-nD})^\kappa} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_1 H^n)^\kappa} \right) + \frac{1}{1 - (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{\kappa+1}} \left( \ln \frac{1 + \varepsilon_2 H^n}{1 + \varepsilon_2 H^n e^{-nD}} + \frac{1}{(1 + \varepsilon_2 H^n e^{-nD})^\kappa} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_2 H^n)^\kappa} \right) \right] \quad (36)$$

Gl. (35) und Gl. (36) lassen sich mit einem Exponenten  $\kappa$ , der die Werte  $\kappa = 0$  oder  $\kappa = 1$  annimmt, zusammenfassen. Der Übergangsbereich für gebrochene Werte von  $\kappa$  wird mit dieser Formel aber unrichtig wiedergegeben (Fehler bis zu 10%). Von den Schwärzungsformeln (33) bis (36) wird die beste Wiedergabe der Schwärzungskurve durch Gl. (36) erreicht<sup>7</sup>. Für viele Zwecke reichen aber bereits die einfacheren Formeln aus. Die Unterschiede in der Wiedergabe betreffen besonders die Schulter der Schwärzungskurve.

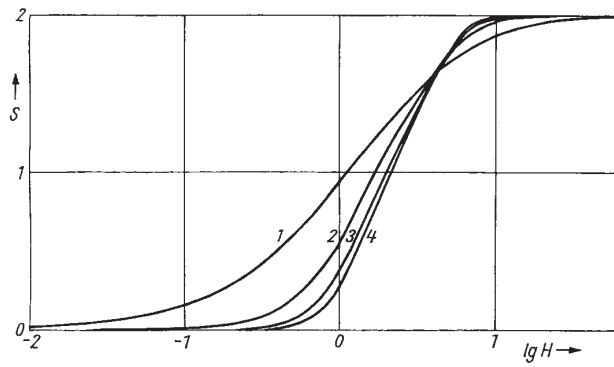
---

<sup>7</sup>Anmerkung des Verfassers bei der Textverarbeitung im April 2010:

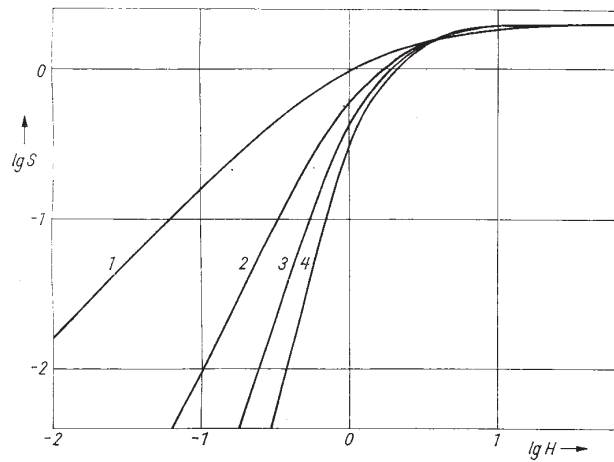
In den Gleichungen (35) und (36) können die beiden Empfindlichkeitskoeffizienten mit  $\varepsilon_2 = 4\pi\varepsilon_1$  zu einem Koeffizienten  $\varepsilon$  zusammengefaßt werden. Dies entspricht einer hinreichend symmetrischen Korngrößenverteilung nach Bild 4, bei welcher  $\alpha_2 = (8 \cdot \dots \cdot 16)\alpha_1$  ermittelt wurde, wie dies schon in der Fußnote 3 erläutert wird. Damit reduziert sich die Anzahl der Parameter auf 5:  $S_\infty$ ,  $D$ ,  $n$ ,  $\varepsilon$ ,  $\kappa$ .



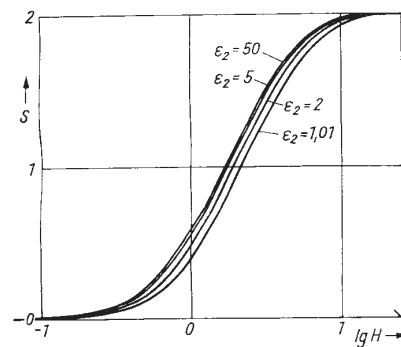
6 Schar von Schwärzungskurven nach Gl. (36) mit  $S_{\infty} = 2$ ,  $n = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 10$ ,  $\kappa = 1$ . Parameter: Optische Dichte  $D$  der trüben Emulsionsschicht (Kurven gekennzeichnet durch den Wert von  $D$ )



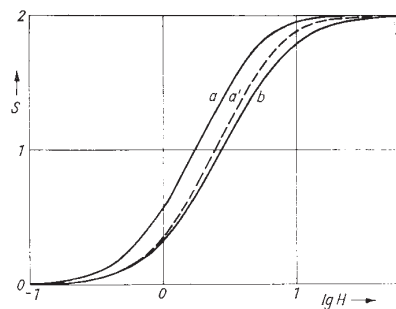
7 Schar von Schwärzungskurven nach Gl. (36) mit  $S_{\infty} = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 10$ ,  $\kappa = 1$ ,  $D = 2$ . Parameter: Keimordnungszahl  $n$  (Kurven gekennzeichnet durch den Wert von  $n$ )



8 Kurvenschar von Bild 7 mit logarithmischer Ordinatenenteilung



9 Schar von Schwärzungskurven nach Gl. (36) mit  $S_{\infty} = 2$ ,  $n = 2$ ,  $D = 2$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\epsilon_1 = 1$ . Parameter:  $\epsilon_2$



10 Schwärzungskurven für  $\kappa = 1$  (Kurve a) und  $\kappa = 0$  (Kurve b). Gestrichelt: Kurve a im Durchgang auf Kurve b geschoben. Berechnet nach Gl. (34) mit den Parameterwerten  $S_{\infty} = 2$ ,  $n = 2$ ,  $D = 2$ ,  $\epsilon = 1$



### 3 Die Einflußgrößen der Schwärzungsfunktion

Die analytische Repräsentation der Schwärzungsfunktion nach Gln. (33) bis (36) erlaubt eine Beurteilung des Einflusses der Parameter  $S_\infty$ ,  $D$ ,  $n$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\kappa$  auf die Form der Schwärzungskurve.

#### 3.1 Der Parameter $S_\infty$

Die Sättigungsschwärzung  $S_\infty$  wird – ohne Berücksichtigung der Solarisation – für  $H \rightarrow \infty$  erreicht. Sie bewirkt als multiplikative Größe lediglich eine Streckung der Schwärzungskurve in Ordinatendirection. Bei Photoschichten kann die Sättigungsschwärzung durch die Art der Entwicklung und Nachbehandlung (Verstärken, Bleichen usw.) beeinflußt werden.

#### 3.2 Der Parameter $D$

Die optische Dichte der trüben Emulsionsschicht  $D$  bewirkt eine Parallelversetzung der Elementarschwärzungskurven der einzelnen Schichttiefen durch die Abschattung der bei der Belichtung darüber befindlichen Schichtteile und damit eine Streckung, Abflachung und Linearisierung der Schwärzungskurve (Bild 6).

Eine lineare, flache Schwärzungskurve mit großem Belichtungsspielraum kann man demnach durch Vergrößerung von  $D$ , beispielsweise durch Anfärben der Schicht vor der Belichtung, erreichen. Bild 6 zeigt aber auch, daß dabei die Schwärzungskurve im Diagramm nach rechts verlagert und somit die Empfindlichkeit herabgesetzt wird.

Man kann als Parameter der Kurven auch die Schwärzung der unentwickelten Schicht  $S_D = D \ln 10$  oder die Transparenz  $e^{-D} = 10^{-S_D}$  ansehen. Die Schichtdicke  $x_0$  als geometrische Größe ist aus den Schwärzungsformeln durch das Integral des Schichtdickeneffektes Gl. (32) herausgefallen. Für den linearen Bereich der Schwärzungskurve ist der Grenzwert des Anstieges der Gradationskurve gegeben durch

$$\gamma_E = \frac{S_\infty}{S_D} \quad (37)$$

#### 3.3 Der Parameter $n$

Die Keimordnungszahl  $n$  bestimmt die Krümmung des Durchhanges der Schwärzungskurve, der durch die vier Formeln (33) bis (36) gleichermaßen gut wiedergegeben wird. Für kleine Werte von  $H$  gilt das Potenzgesetz Gl. (10), dessen Darstellung in doppelt-logarithmischen Koordinaten eine Gerade mit dem Anstieg  $n$  liefert. Durch Logarithmieren der Ordinatenwerte einer Schwärzungskurve bekommt man daher im Bereich des Durchhanges stets eine Gerade, aus der man den Parameter  $n$  ablesen kann.

In Bild 7 sind vier Schwärzungskurven mit den Parameterwerten  $n = 1$  bis 4 dargestellt, die erkennen lassen, daß mit der Vergrößerung von  $n$  die Krümmung im Durchhang und in der Schulter sowie die Gradation steiler, aber die Empfindlichkeit kleiner wird. Die Kurven geben gleichzeitig den möglichen Variationsbereich von  $n$  an. In Bild 8 sind die gleichen Kurven wie in Bild 7 auf logarithmische Koordinaten übertragen zur Veranschaulichung der Geradendarstellung des Durchhanges.

### 3.4 Die Parameter $\varepsilon$ , $\varepsilon_1$ , $\varepsilon_2$

Die mit der Korngröße verknüpften Empfindlichkeitskoeffizienten  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  bewirken eine Parallelverschiebung in Abszissenrichtung und eine Verformung der Schulter der Schwärzungskurve. Die Parallelverschiebung ist allein auf die multiplikative Vergrößerung der Empfindlichkeit zurückzuführen. Die Korngrößenverteilung wird durch die beiden Koeffizienten  $\varepsilon_1 = \eta/\alpha_1$  und  $\varepsilon_2 = \eta/\alpha_2$  ausgedrückt. In Bild 9 ist eine Schar von Schwärzungskurven mit festgehaltenem Wert  $\varepsilon_1 = 1$  und  $\varepsilon_2$  als Parameter dargestellt. Dabei zeigt es sich, daß die Veränderung von  $\varepsilon_2$  im wesentlichen die Empfindlichkeit (Parallelverschiebung) betrifft und nur in sehr geringem Maße die Form. Es ist aber erkennbar, daß bei großen Unterschieden der Koeffizienten und damit großen Streubreiten der Korngrößenverteilung eine Abflachung in der Schulter eintritt. Der Effekt ist aber so gering, daß man ohne weiteres das zweite Exponentialglied in Gl. (25) vernachlässigen kann. Mit der Korngrößenverteilung Gl. (26) und  $\kappa = 1$  wird man dann auf die Schwärzungsfunktion Gl. (34) geführt, durch die eine Schwärzungskurve mit geringfügig zu stark abgeflachter Schulter dargestellt wird. Die Abflachung der Schulter findet eine Erklärung darin, daß mit dem Wegfall die Verteilung  $e^{-\alpha_2 V}$  mehr kleine, wenig empfindliche Körner mit geringem Schwärzungsbeitrag die Schwärzung in der Schulter aufbauen.

Mit der Annahme einer exponentiellen Korngrößenverteilung nach Gl. (26) ist die Form der Verteilung in der analytischen Formulierung der Schwärzungsfunktion nicht mehr enthalten. Die Korngröße selbst ist Bestandteil des Empfindlichkeitskoeffizienten  $\alpha$ .

### 3.5 Der Parameter $\kappa$

Der Formexponent  $\kappa$  bewirkt eine Veränderung der Empfindlichkeit und der Form der Schulter der Schwärzungskurve. Bild 10 zeigt die Schwärzungskurven für  $\kappa = 1$  [Gl. (34)] und  $\kappa = 0$  [Gl. (33)]. Beim flüchtigen Anblick scheint nur eine Parallelversetzung vorzuliegen. Schiebt man aber die Kurve a auf die Kurve b (gestrichelt), so fällt die zunehmende Abweichung beider Kurven in Richtung der Schulter auf: Mit der Verringerung von  $\kappa$  wird die Schulter flacher.

Die Zunahme der Empfindlichkeit mit der Vergrößerung von  $\kappa$  erklärt sich dadurch, daß der Schwärzungsbeitrag der Körner mit der Potenz  $V^\kappa$  anwächst und daher die Schwärzung des Durchhanges gegenüber der Schwärzungskurve mit  $\kappa = 0$  um den Faktor  $\kappa + 1$  vergrößert wird. Dieser Faktor wird in Richtung höherer Schwärzungen wegen der Zunahme der kleinen Körner mit geringem Schwärzungsbeitrag kleiner, dennoch wirkt sich die größere Schwärzungseffektivität bei großem Formexponenten  $\kappa$  im Zusammenhang mit der geringen Zunahme der Sättigungsschwärzung bei der Normierung der Kurve im Gebiet der Schulter so aus, daß die im Durchgang auf die Kurve b geschobene Kurve a noch deutlich über der Kurve b liegt.

Zwischen der Kurve b und der gestrichelten Kurve a' liegt der Variationsbereich von  $\kappa$ . Er entspricht einem maximalen Fehler von 5%. Bei chemischer Entwicklung mit einem Formexponenten  $\kappa$  ist Gl. (34) zur Beschreibung der Schwärzungsfunktion ausreichend, selbst wenn  $\kappa$  geringfügig unter 1 liegt. (Vom Verfasser wurde experimentell an Röntgenschwärzungskurven  $\kappa = 0.9$  ermittelt.) Abweichungen werden sich nur

in der Schulter bemerkbar machen, während im Durchhang und im mittleren Bereich der Schwärzungskurve kleinere Abweichungen von den übrigen Parametern der Schwärzungskurve aufgefangen werden.

Verzichtet man auf eine genaue Darstellung der Schulter der Schwärzungskurve, so kann auch Gl. (33) als brauchbare Repräsentation der Schwärzungsfunktion dienen. Die Schwärzungskurve nach Gl. (33) ist drehsymmetrisch um den Wendepunkt, der bei der Schwärzung  $S_\infty/2$  liegt. Bei einer Drehung von  $180^\circ$  gehen Durchhang und Schulter ineinander über. Hierin unterscheidet sich Gl. (33) nicht von den phänomenologischen Schwärzungsfunktionen (4), (5) und (6); sie ist aber ungeachtet aller Vereinfachungen, die mit bewußter Kenntnis ihrer Einflüsse eingeführt wurden, *physikalisch* begründet und erlaubt eine gute Wiedergabe des größten Teils der Schwärzungskurve, des mittleren Teils und des Durchhanges.

## 4 Zusammenfassung

Die analytische Formulierung der photographischen Schwärzungsfunktion ist mit ad hoc aufgestellten phänomenologischen Interpolationsformeln nur mit beschränkter Genauigkeit und ohne Einsicht in die physikalischen Zusammenhänge möglich. Durch Berücksichtigung des Einflusses der Reaktionskinetik des Keimaufbaus, der Korngrößenverteilung und des Schichtdickeneffektes können mit gewissen vereinfachenden Annahmen physikalisch begründete Formeln der Schwärzungsfunktion angegeben werden, die die Schwärzungskurve im mittleren Bereich und im Durchhang quantitativ und im Sättigungsbereich qualitativ richtig beschreiben.

## Literatur

- [1] MEES, C. E. K.: The Theory of the Photographic Process. New York 1954, S. 180
- [2] LUTHER, R.: The Under-Exposure Period of the Characteristic Curve.  
Trans. Faraday Soc., 19 (1923) 340
- [3] METZ, H.-J.: Phot. Korr. **106** (1970) 37, 56, 70
- [4] MELCHER, H.: Transmission und Absorption.  
Ein allgemeines Gesetz für ionisierende Strahlungen.  
Dtsch. Verl. d. Wissenschaften, Berlin 1970
- [5] KRÖBER, K., E. GERTH: Z. wiss. Phot. **63** (1969) 119
- [6] GOTTWEISS, L.: Z. wiss. Phot. **62** (1968) 65
- [7] VAUCOULEURS, G. de: Applied Optics **7** (1968) 1513
- [8] GERTH, E.: BILD UND TON **26** (1973) 45, 69, 107
- [9] MITCHELL, J. W.: Phot. Korr., 1. Sonderheft 1957
- [10] GERTH, E.: BILD UND TON **16** (1963) 268, 296, 333
- [11] SCHAUM, K.: Z. wiss. Phot. **7** (1909) 401
- [12] SILBERSTEIN, L.: Phot. J. **5** (1922) 464
- [13] GERTH, E.: Analytische Darstellung der Kinetik des Keimaufbaus  
beim photographischen Prozeß, Dissertation (B), Dresden, 1971

- [14] VOLKE, C.: J. Signal AM **1** (1973) 461
- [15] GERTH, E.: Ann. Phys. **27** (1971) 126
- [16] GERTH, E.: J. Signal AM **1** (1973) 261
- [17] GERTH, E.: J. Signal AM **2** (1974) 367
- [18] GERTH, E.: Z. wiss. Phot. **59** (1965) 1
- [19] GERTH, E.: Wiss. Z. PH Potsdam **10** (1966) 119
- [20] NUTTING, P. G.: Phil. Mag. **26** (1913) 423
- [21] SVEDBERG, T.: Phot. J. **62** (1922) 186
- [22] KLEIN, E.: AGFA-Veröff. Leverkusen/München **II** (1958) 85
- [23] NAU, P.-E., H. SPINDLER: Chem. Techn. **27** (1975) 668
- [24] GERTH, E.: Z. wiss. Phot. **60** (1967) 106

### **Anmerkung des Verfassers im Jahre 2010:**

Der vorliegende Artikel ist im Jahre 1973 in einer Fachzeitschrift für Film- und Fototechnik veröffentlicht worden, welche seinerzeit lediglich auf dem Gebiet der DDR vertrieben wurde. Es ist heute kaum noch möglich, Exemplare dieser Zeitschrift aufzutreiben oder selbst aus Bibliotheken auszuleihen. Der Verfasser entschloss sich deshalb, den Text dieses Aufsatzes über das INTERNET dem hieran interessierten Leser zur Verfügung zu stellen.

Der Text der Originalveröffentlichung wurde mit dem Textverarbeitungsprogramm LaTeX 2e aufgenommen, umgebrochen und wortgetreu wiedergegeben. Bezüge zur Gegenwart werden mit Fußnoten angemerkt.

# On the theory of the photographic characteristic function

Dr. sc. nat. Ewald Gerth

## Abstract

The analytic formulation of the photographic characteristic function on the base of phenomenological interpolation formulae set up ad hoc is possible only with limited accuracy and without any insight into the physical relations. Accounting for the influence of the reaction kinetics of the step-like build-up of development specks, the grain-size distribution of the silver halide crystals, and the thickness effect of the opaque photographic layer and resorting to certain simplifying assumptions, some formulae of the blackening function can be supplied, which describe the characteristic curve in its *straight* middle region and the *toe* quantitatively correct but in the region of the *shoulder* at least qualitatively satisfying.

## Comment of the author in 2010:

The present article was published in 1973 in the professional movie-technical journal "BILD UND TON". The journal was distributed only in the restricted zone of the GDR, so that it is nearly impossible to get any exemplar even from a library. Therefore, in order to make the article available for the interested reader, the author decided to install the full text in the INTERNET.

The text of the original publication has been scanned, made up, and restored word for word by means of the text processing programme LaTeX 2e.

References to the present time are remarked by footnotes.

Article available in German by the web-address: [www.ewald-gerth.de/51.pdf](http://www.ewald-gerth.de/51.pdf)