

Das magnetische Kraftgesetz unter Berücksichtigung der Geometrie der Pole

Von *H. Melcher, E. Gerth und H.-J. Wilke in Potsdam*

Die experimentelle Bestätigung des COULOMBSchen Gesetzes für magnetische Kräfte erfolgt oft nur in roher Näherung, da es nicht möglich ist, die Magnetpole hinreichend gut in bestimmten Punkten zu lokalisieren.

Es ist offenbar eine weit verbreitete Ansicht, daß die Kraft zwischen zwei magnetischen Körpern stets umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung zwischen den Magnetpolen ²⁾ sei; hierbei bleibt nicht nur die Tatsache unberücksichtigt, daß das COULOMBSche Gesetz in der üblichen Form

$$K = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{P_1 \cdot P_2}{r^2} \quad (1)$$

nur auf punktförmige Quellen angewendet werden darf; es wird oft die gegenseitige Influenzwirkung (bei Eisenmagneten) außer acht gelassen, d. h. im allgemeinen ändert sich auch die Polstärke P mit dem Abstand r .

In dieser Arbeit werden verschiedene Versuchsanordnungen angegeben zur Bestimmung der Kraft zwischen zwei Magneten in Abhängigkeit vom Abstand der Pole.

Es wird gezeigt, daß der Exponent des magnetischen Kraftgesetzes

$$K = C \cdot r^n \quad (2)$$

der für den Idealfall zweier punktförmiger Feldquellen $n = -2$ ist, aufgrund der Geometrie der Feldquellen im allgemeinen von diesem Wert abweicht und eine Funktion vom Abstand r ist. Es werden die besonders günstigen Eigenschaften der keramischen Dauermagnete für Magnetkraftversuche hervorgehoben.

Schließlich wird darauf hingewiesen, daß mit Hilfe von Magneten auch Analogieversuche durchgeführt werden können zu anderen physikalischen Erscheinungen, wo für punktförmige Quellen das quadratische Abstandsgesetz gilt. z. B. für die Intensität des Lichtes oder der radioaktiven Strahlung.

1 Auswertung der Versuchsergebnisse von *Ostwald*

Mißt man an zwei größeren Magneten die Kraft in Abhängigkeit vom Abstand der gegenüberliegenden Pole, so wird man für geringe Abstände im allgemeinen $n < 2$ finden, wie dies bereits aus den Messungen von OSTWALD [1] hervorgeht. Bei bestimmten Anordnungen der Pole kann man auch $n > 2$ erhalten.

Eine Reihe von Möglichkeiten sind in Tab. 1 zusammengestellt.

Um den Exponenten des Kraftgesetzes zu ermitteln, ist es zweckmäßig, die Meßwerte der Funktion $K = f(r)$ in doppeltlogarithmisches Koordinatenpapier einzutragen.

¹⁾ Scanned from an original and reworked with the word processing programme LaTeX by E. Gerth in 2017
Facsimile-reproduction: www.ewald-gerth.de/Magnetisches-Kraftgesetz.pdf

²⁾ In diesem Aufsatz wird unter einem P o l ein zusammenhängender Bereich des Magnetkörpers verstanden, in dem die Feldlinien die Oberfläche in gleichem Sinne durchsetzen.

Nr.	Anordnung	K	$\lim_{q \rightarrow 0} n$	$\lim_{q \rightarrow \infty} n$
1		$\frac{c}{r^2}$	-2	$-2 = \text{const}$
2		$c \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+l)^2} \right)$	-2	-2
3		$\frac{c}{r(r+l)}$	-2	-1
4		$\frac{c}{l_1 l_2} \ln \frac{(1 + \frac{l_1}{r})(1 + \frac{l_2}{r})}{1 + \frac{l_1}{r} + \frac{l_2}{r}}$	-2	0
5		$\frac{2c}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{l}{2r})^2}}$	-2	+1
6		$\frac{2c}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{l}{2r})^2}}$	-2	-1
7		$\frac{2c}{r^2} \left[\sqrt{1 + (\frac{l}{r})^2} - 1 \right]$	-2	-1
8		$c \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right)$	-3	-2
9		$c \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{(r+l)^2} + \frac{1}{(r+2l)^2} \right)$	-3	-2
10		$\frac{2c}{r^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{l}{r})^2}} \right)$	-4	-2

Tabelle 1. Zusammenstellung von 10 Polanordnungen mit den zugehörigen analytischen Formulierungen und Exponenten n nach Gl. (2) ³⁾

³⁾ Die Tabelle wurde ohne Retusche dem Original entnommen und weist Qualitätsmängel auf.
Für die Reproduktion stand dem Mitautor E. Gerth (im Jahre 2018) nur eine Photokopie zur Verfügung.

Der Anstieg der Kurve ergibt dann nach Gl. (2) unmittelbar den Exponenten $n = f(r)$.
 OSTWALD hatte versucht, durch Erweiterung der Gleichung

$$K = Cr^{-2} \quad (3)$$

zu

$$K = C(r + x)^{-2}, \quad (4)$$

wobei x der Abstand des Pols hinter der Oberfläche ist, einen größeren Bereich der Kurve zu erfassen. Es zeigt sich aber, dass man für kleine Abstände mit der Gleichung (4) keineswegs mehr auskommen konnte und ein Kraftgesetz nach (2) mit $n = 0,8$ annehmen musste. (Der Exponent n kann sich hierbei natürlich nur auf die Maßzahlen, nicht aber auf die Maßeinheiten beziehen.) Die formelmäßige Erfassung der Messwerte von Ostwald ist sehr schwierig, da als Probekörper eine Stahlkugel verwendet wurde, die ihren Magnetismus erst durch die abstandsabhängige Influenz von dem Topfmagneten erhält. Weiterhin wäre auch die Geometrie der Pole zu berücksichtigen.

In doppeltlogarithmischem Koordinatenpapier ergeben die Ostwaldschen Messwerte folgende Kurve, an der man drei Bereiche unterscheiden kann (Abb. 1):

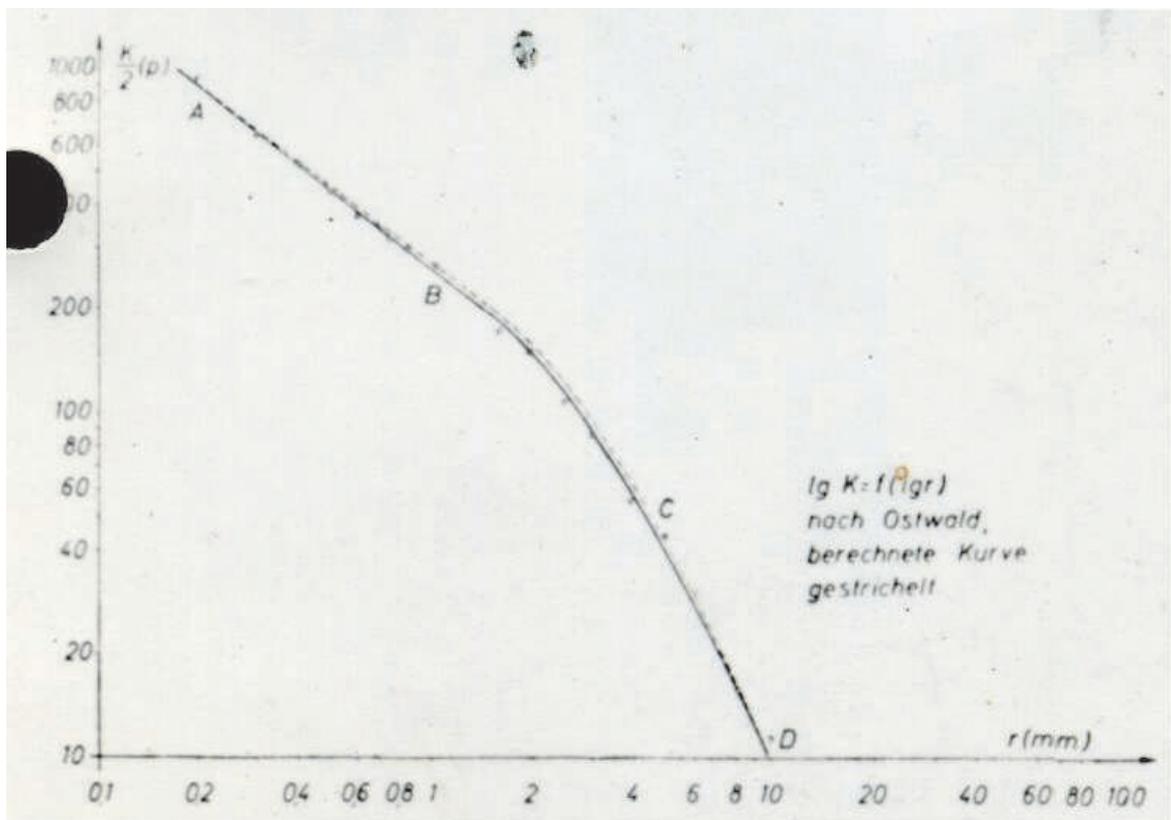


Abb. 1: Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung in doppelt-logarithmischer Darstellung.
 experimentelle Kurve : ausgezogen
 berechnete Kurve : gestrichelt

Für größere Entfernungen (Bereich CD) gilt etwa $n = -2$ und $C = 1000 \text{ pmm}^2$, d. h. das quadratische Abstandsgesetz. Für den anderen linearen Teil (Bereich AB) entnimmt man der Kurve $n = 0,75$ und $C = 260 \text{ pmm}^2$. Im mittleren Bereich BC ändern sich C und n stetig mit r . Zur Zusammenfassung aller Bereiche kann die stetige Änderung von $n(r)$ dazu benutzt werden, die Änderung von $C(r)$ zu beschreiben.

Die Funktion $n = f(\log r)$ verläuft im Bereich BC angenähert linear und ist mit $n_1 = -0,75$ und $n_2 = -2$

$$n = \frac{n_1 - n_2}{\log 10 - \log 1} \log r + n_1 = -1,25r - 0,75, \quad (5)$$

insgesamt also:

$$n = \begin{cases} -2 & \text{für } r > 10 \text{ mm} \\ -(1,25 \lg r + 0,75) & \text{für } 1 \text{ mm} < r < 10 \text{ mm} \\ -0,75 & \text{für } 0 < r < 1 \text{ mm} \end{cases} \quad (6)$$

Die Änderung von C kann man erfassen, indem man von $\log C$ (logarithmisches Koordinatenpapier) ein Glied subtrahiert, das von $n + 2$ abhängt und für $n = 2$ verschwindet.

$$\log C = (1 - f(n + 2)) \log C_\infty \quad (7)$$

C ist die für einen großen Abstand gültige Konstante $C_\infty \approx C_{CD} = 1000 \text{ pmm}^2$.

Hieraus ergibt sich

$$K = C_\infty^{1-f(n+2)} r^n \quad (8)$$

Setzt man $f(n + 2)$ als Potenzfunktion mit $a(n + 2)^b$ an, so erhält man den geringsten Fehler (in allen Fällen war $\Delta C/C < 10\%$ für $b = 2/3$. Der Wert von a berechnet sich damit zu 1,68. Die gestrichelte Kurve in Abb. 1 wurde nach (6) und (8) berechnet.

Dieses Verfahren, die empirisch gefundenen Messwerte mit einer Formel zu beschreiben, vermag aber wenig zu befriedigen, da man weder quantitativ noch qualitativ auf die Ursachen rückschließen kann, warum $|n|$ mitunter von 2 abweicht.

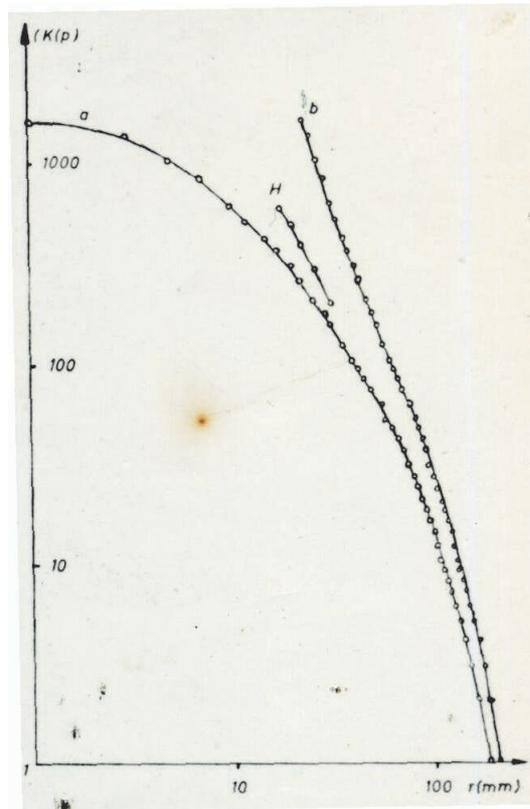


Abb. 2: Abhängigkeit der Abstoßkraft zwischen zwei keramischen Ringmagneten von der Entfernung

- a) Abstand zwischen den gegenüberliegenden Polflächen
- b) Abstand von Mitte zu Mitte gemessen. H Kurve nach H. HOFFMANN [2]

2 Bemerkungen zu den Ergebnissen von H. Hoffmann

In der Arbeit von H. HOFFMANN⁴ wird ebenfalls die Geometrie der Pole nicht berücksichtigt. Seine mitgeteilten Ergebnisse erbringen zwar das quadratische Abstandsgesetz für die von ihm verwendeten Magnetkörper, sind aber in ihrer Begründung nicht überzeugend.

Der von ihm erfasste Abstandsbereich ist zu klein, um auf die Allgemeingültigkeit des COULOMBSchen Gesetzes rückschließen zu können. Von den Verfassern wurden die Versuche wiederholt. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 dargestellt. Bei Kurve a wurde als Abstand die Entfernung zwischen 2 gegenüberliegenden Polflächen gewählt. Bei Kurve b wurde die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Magnetkörper, die als Sitz der idealisierten Pole angenommen werden, als Abstand aufgetragen. Die Kurve H mit 5 Messpunkten innerhalb eines sehr kleinen Entfernungskintervalles gibt die Ergebnisse von H. HOFFMANN wieder. Dass H. HOFFMANN (zufällig) den Exponenten $n = -2$ erhielt, ergab sich aus der Versuchsanordnung und ist nicht allgemeingültig, wie unsere Messungen und theoretischen Überlegungen zeigen. Aus den Messkurven der Verfasser entnimmt man, dass der Exponent n keine Konstante ist, sondern bei den unterschiedlichsten Magnetkörpern und ihren geometrischen Formen eine Abhängigkeit vom Abstand r zeigt. Durch Verlagerung der idealisierten Pole lässt sich nur angenähert (in einem bestimmten Entfernungskintervall) eine Linearisierung der Messkurve (in doppelt-logarithmischer Darstellung) erreichen. Hierbei kann n durchaus größer als 2 werden (Kurve b). Indem das Gewicht der Magnete über eine feste Rolle durch Gegengewichte kompensiert wird (Abb. 3), lässt sich ein größerer Abstandsbereich als bei H. HOFFMANN erfassen.

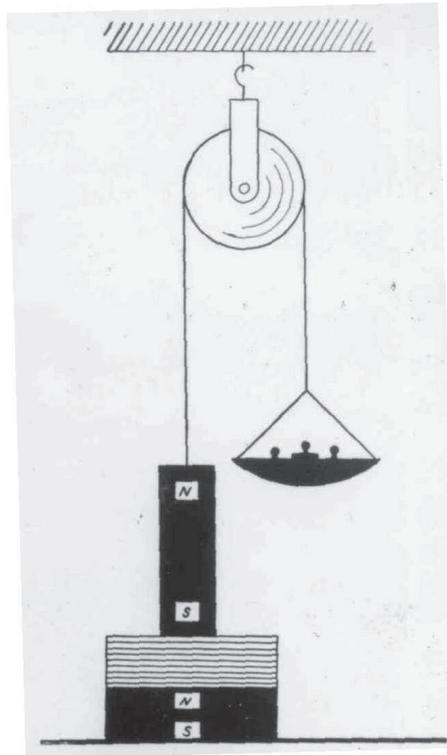


Abb. 3: Versuchsaufbau zur Messung der Anziehungskraft.
Abstandsvariation durch Glasplattenwand

⁴H. HOFFMANN: Das COULOMBSche Gesetz für den Magnetismus, einmal anders.
PRAXIS (1961) 4. S. 93 ff.

3 Der Einfluss der Geometrie der Polanordnung auf den Exponenten des Kraftgesetzes

Wie eingangs erwähnt, hängt die Abweichung des Exponenten n von -2 offenbar mit der Geometrie der Feldquellen zusammen. Wenn die beiden zur Wechselwirkung gebrachten Felder einzeln für sich nicht mehr kugelsymmetrisch sind, ist es nicht gleichgültig, in welcher Lage die Feldquellen einander genähert werden. Bei zwei punktförmigen Feldquellen ist diese Symmetriebedingung erfüllt, und der Exponent ist nach (3)

$$n = \frac{d \ln K}{d \ln r} = -2 = \text{const.} \quad (9)$$

Wird von zwei punktförmigen Magneten der eine Pol durch 2 punktförmige Quellen ersetzt, so ändert sich bereits der Exponent n stetig mit r . n nimmt aber für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ endliche Grenzwerte an. Mitunter treten auch Extremwerte auf. Die Berechnung solcher Polanordnungen sei an zwei Beispielen erläutert:

Stehen einer negativen Punktquelle zwei starr in der Länge l miteinander gekoppelte positive gegenüber (Anordnung Nr. 2 in Tabelle 1), so ist der Kraftansatz

$$K = C \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+l)^2} \right) \quad (10)$$

und

$$n = \frac{d \ln K}{d \ln r} = -2 \frac{1 + (1 + \frac{l}{r})^{-3}}{1 + (1 + \frac{l}{r})^{-2}} = -2 \frac{1 + (1 + q)^{-3}}{1 + (1 + q)^{-2}} \quad (11)$$

mit dem für alle Beziehungen dieser Art charakteristischen Quotienten $q = l/r$.

Man erkennt, dass sowohl für kleine als auch für große q -Werte n gegen -2 strebt. Dazwischen liegt ein Extremwert bei $q = 0,68$ mit $n = -1,77$.

Der Extremwert tritt nicht mehr auf, wenn man die Strecke l homogen mit einer großen Zahl von Elementarfeldquellen besetzt. (Anordnung Nr. 3, Tabelle 1).

$$K = \frac{C}{l} \int_0^l \frac{dl}{(r+l)^2} = \frac{C}{r(r+l)}. \quad (12)$$

Der Exponent ist in diesem Falle

$$n = -\frac{2+q}{1+q} \quad (13)$$

und kann die Grenzwerte

$$\lim_{q \rightarrow 0} n = -2 \quad \text{und} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} n = -1 \quad (14)$$

annehmen (vgl. Tabelle 1).

In dieser Tabelle ist eine Auswahl verschiedener Anordnungen von Polen mit den dazugehörigen Funktionen der Kraft und den Grenzwerten des Exponenten zusammengestellt.

Für Demonstrationsversuche sind besonders gut die Anordnungen 9 und 10 geeignet, da hier der Dipolcharakter der Magnete berücksichtigt wird. Aber auch die Anordnungen 5 und 8 können experimentell leicht untersucht werden, nur muss man hier jeweils einen Pol der Magnete „isolieren“, d. h. der Magnet muss so lang sein, dass der zweite Pol praktisch keinen Einfluss auf die Anordnung mehr hat. Die Punktfeldquellen können nur angenähert mit sehr schlanken keramischen Magneten erhalten werden. Für die übrigen Anordnungen müssen die Magnete eine spezielle Form erhalten.

Die Übertragung des Artikels ins Internet wird fortgesetzt.
Potsdam, 11. 08. 2018
Ewald Gerth

Am 2. September 2020 wurde von Prof. Dr. Dr. Melcher ein Faksimile-Abdruck des Artikels als PDF-Datei zur Verfügung gestellt, welcher im INTERNET unter der Adresse

www.ewald-gerth.de/Magnetisches-Kraftgesetz.pdf

abgerufen werden kann.

Potsdam, 13. 09. 2020
Ewald Gerth