WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE
„DR. THEODOR NEUBAUER“
ERFURT - MÜHLHAUSEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe. 11. Jahrgang 1975, Heft 2, S. 67-71
Als Manuskript gedruckt

AUS DER SEKTION MATHEMATIK/PHYSIK
DER PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE „DR. THEODOR NEUBAUER“
ERFURT - MÜHLHAUSEN
Sektionsdirektor Prof. Dr. sc. phil. Hans-Dieter Pöltz

Darstellung von Schwingungsvorgängen als Transformationsproblem von Matrixfunktionen[1]

Von Horst Melcher und Ewald Gerth

Eingegangen am 10. 5. 1975

Prof. Dr. habil. Johannes Thomas (19. 7. 1925 - 7.8. 1970) zum Gedenken.

0. Einleitung

Schwingungen physikalischer Größen lassen sich bekanntermaßen als Lösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung darstellen. In der konventionellen Form dieser Lösung ist nicht ohne weiteres erkennbar, daß es sich hierbei um die Transformation eines Anfangszustandes der Schwingung zur Zeit $t = 0$ in einen Zustand zu einer späteren Zeit t handelt. Der vorliegende Beitrag hat das Ziel, den Schwingungsvorgang eindeutig als ein Transformationsproblem zu charakterisieren, das sich bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme ergibt, und somit die formale und behandlungsmethodische Einheit zwischen schon früher von den Verfasern beschriebenen Transformationsproblemen herzustellen.

Oscillations represented as a transformation problem of matrix functions

Horst Melcher and *Ewald Gerth*

Summary

Oscillations are usually represented as solutions of a differential equation of second order. One cannot see, without further comment, from this conventional form of the solution, that it is a transformation from a state at the beginning (time $t = 0$) into a state at a later time. In this article it will be shown, that one can definitely characterize oscillations as a problem of transformation by means of matrices. In this way the formal and methodical correspondence with problems of transformation formerly published can be pointed out.

1 Lösung des Differentialgleichungssystems eines Transformationsproblems

In den bereits publizierten Arbeiten, bei denen es um die physikalischen Probleme der Kinetik des Keimaufbaues beim photographischen Prozeß [1] [2], die Transmission von Korpuskularstrahlung durch Materieschichten [3] [4] und die Umwandlung von Radionukliden [5] durch

[1]Abstract: `www.ewald-gerth.de/46abs.pdf` – attached at the end of this article (page 79).

Kernprozesse ging, wurde die Lösung eines in Matrixform geschriebenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \tag{1}$$

in Gestalt einer Matrizen-Transformationsgleichung benutzt; es bedeuten $\mathbf{x}$ Vektor der physikalischen Größe, t Zeit und $\mathbf{K}$ quadratische Koeffizientenmatrix. Die Lösung ergibt sich aus Gl. (1) durch Umwandlung in eine (ausgeartete) VOLTERRAsche Integralgleichung mit dem Anfangsvektor $\mathbf{x}(0)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int\limits_0^t \mathbf{K}(\tau)\mathbf{x}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

und Entwicklung derselben in eine NEUMANNsche Reihe mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$

$$\mathbf{x}(t) = \Big(\mathbf{1} + \int\limits_0^t \mathbf{K}(t')\ \mathrm{d}t' + \int\limits_0^t \mathbf{K}(t') \int\limits_0^{t'} \mathbf{K}(t'')\ \mathrm{d}t''\ \mathrm{d}t' + \cdots\Big)\mathbf{x}(0). \tag{3}$$

Der in 01. (3) enthaltene Klammerfaktor ist die Resolventenmatrix $\mathbf{R}(t)$, durch die der Anfangsvektor $\mathbf{x}(0)$ in den Vektor $\mathbf{x}(t)$ transformiert wird.
Bei konstanter Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}$ geht die Resolventenmatrix $\mathbf{R}(t)$ in die Matrix-Exponentialfunktion $\exp(\mathbf{K}t)$ über, so daß die Lösung in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{K}t)\mathbf{x}(0) \tag{4}$$

geschrieben werden kann. Derartige Resolventenmatrizen bestimmen auch das zeitliche Verhalten von Schwingungsvorgängen.

2 Konventionelle Lösung der Schwingungsgleichung

Eine ungedämpfte harmonische Schwingung wird durch die lineare, homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{5}$$

beschrieben: x Schwingungsgröße, ω_0 Kreisfrequenz des ungedämpften Systems.
Die Lösung ergibt sich mit der zugeordneten charakteristischen Gleichung

$$s^2 + {\omega_0}^2 = 0, \tag{6}$$

die die Eigenwerte $s_1 = \mathbf{i}\omega_0$ und $s_2 = -\mathbf{i}\omega_0$ mit $\mathbf{i}$ als Einheit der imaginären Zahlen liefert, in der Gestalt

$$x(t) = x_1(0) \cdot \exp(\mathbf{i}\omega_0 t) + x_2(0) \cdot \exp(-\mathbf{i}\omega_0 t). \tag{7}$$

In entsprechender Weise erhält man für eine gedämpfte Schwingung mit einem der ersten Ableitung proportionalen Dämpfungsglied $2\varrho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ aus der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\varrho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{8}$$

mit

$$s^2 + 2\varrho s + {\omega_0}^2 = 0 \tag{9}$$

die Lösung

$$x(t) = \exp(-\varrho t)[x_1(0) \cdot \exp(\sqrt{\varrho^2 - {\omega_0}^2}\, t) + x_2(0) \cdot \exp(-\sqrt{\varrho^2 - {\omega_0}^2}\, t)], \tag{10}$$

wobei die als Determinate formulierte Diskriminante

$$\varrho^2 - {\omega_0}^2 = -\omega^2 = \begin{vmatrix} \varrho & \omega_0 \\ \omega_0 & \varrho \end{vmatrix}, \tag{11}$$

je nachdem, ob sie kleiner oder größer als Null ist, darüber entscheidet, ob die Zeitfunktion $x(t)$ einen aperiodischen oder periodischen Verlauf nimmt.

3 Komplexe Zahlen und Orthogonalmatrizen

Die Gleichungen (7) und (10) geben die Zeitfunktion $x(t)$ in Abhängigkeit von zwei Anfangswerten an. Diese Lösungen sind aber für reelle Werte von x im Sinne einer Transformation nicht umkehrbar, d.h., es ist nicht möglich, aus dem Endwert $x(t)$ eindeutig auf die Anfangswerte $x_1(0)$ und $x_2(0)$ zu schließen. Erst durch die Einführung der komplexen Zahlen z für alle Werte von x erhält man mit Hilfe der EULERschen Beziehung $\exp(\mathbf{i}\alpha) = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha$ eine eindeutige Zuordnung von Anfangs- und Endwert der Lösung:

$$z(t) = \exp(\mathbf{i}\omega_0 t) \cdot z(0). \tag{12}$$

Die Gl. (12) stimmt formal mit Gl. (4) überein, wobei aber z als komplexe Zahl ein Vektor in der Gaußschen Zahlenebene ist. Der Exponentialausdruck $\exp(\mathbf{i}\omega_0 t)$ erweist sich als der Resolventenmatrix $\mathbf{R}(t)$ äquivalent.
Die Analogie ist vollständig, wenn man $\exp(\mathbf{i}\omega_0 t)$ nicht als eine aus zwei Komponenten bestehende komplexe Zahl, sondern als eine quadratische Matrix 2. Ordnung mit 4 Elementen auffaßt. Demzufolge müßte auch die Einheit der imaginären Zahlen $\mathbf{i}$ die Bedeutung einer quadratischen Matrix haben. Das ist der Fall, da sich die Orthogonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \tag{13}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \tag{14}$$

genauso wie die reelle Zahl 1 und die imaginäre Zahl $\mathbf{i}$ verhalten[2]. Bemerkenswert ist, daß die mit den Größen $\mathbf{1}$ und $\mathbf{I}$ gebildeten komplexen Matrizen und damit auch Funktionen dieser Matrizen stets kommutativ sind.

[2] Die Form dieser zweireihigen Matrizen entspricht den PAULIschen Spin-Matrizen.

Für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_1 \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_2 \tag{16}$$

gilt also

$$\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_1. \tag{17}$$

Die Determinante der komplexen Matrix $\mathbf{Z}$ liefert das Quadrat des absoluten Betrages, d.h. das Amplitudenquadrat

$$|\mathbf{Z}| = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2, \tag{18}$$

und unterscheidet sich somit von dem Absolutbetrag der komplexen Zahl $z = a + \mathbf{i}b$ durch die Quadratwurzel

$$|z| = |a + \mathbf{i}b| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{19}$$

Das Produkt der komplexen Matrix $|\mathbf{Z}| = \mathbf{1}a + \mathbf{I}b$ mit ihrer konjugiert-komplexen Matrix $|\mathbf{Z}|^* = \mathbf{1}a - \mathbf{I}b$ ist mit Gl. (18)

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^* = \mathbf{1}|\mathbf{Z}| = \mathbf{1}|\mathbf{Z}^*|. \tag{20}$$

Der Tangens des Phasenwinkels φ ergibt sich als Quotient der Elemente der ersten Spalte der Matrix $\mathbf{Z}$

$$\tan\varphi = b/a. \tag{21}$$

Schreibt man anstelle von Gl. (12)

$$\mathbf{Z}(t) = \exp(\mathbf{I}\omega_0 t)\mathbf{Z}_0, \tag{22}$$

so hat man damit die Lösung in Form einer linearen Matrixtransformation.
Die Resolvente $\exp(\mathbf{I}\omega t)$ berechnet man zweckmäßigerweise durch Reihenentwicklung.
Man erhält

$$\exp(\mathbf{I}\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \tag{23}$$

also ebenfalls eine Orthogonalmatrix.
Die EULERsche Beziehung $\exp(\mathbf{i}\omega t) = \cos\omega t + \mathbf{i}\sin\omega t$ ist somit eigentlich als eine Vektordarstellung der orthogonalen Transformationsmatrix (23) zu betrachten. Es liegt an den günstigen Orthogonalitätseigenschaften dieser Transformation, daß die Verkürzung der Matrix zu einem Vektor überhaupt möglich ist.
Grundsätzlich kann man in allen Fällen den Skalar 1 durch die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und die Einheit der imaginären Zahlen $\mathbf{i}$ durch die Orthogonalmatrix $\mathbf{I}$ ersetzen und erhält dann eine der Matrizentransformation adäquate Darstellung.

4 Darstellung der Schwingungsdifferentialgleichung mit Hilfe von Orthogonalmatrizen

Das Differentialgleichungssystem der ungedämpften Schwingung läßt sich leicht angeben, wenn man die Schwingung als die Projektion einer Kreisbewegung in der Gaußschen Zahlenebene auf die reelle (oder imaginäre) Achse auffaßt. Man betrachtet die Kreisbewegung im Koordinatenkreuz mit den Achsen x_1 und x_2. Aus Abb. l entnimmt man unmittelbar das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \qquad -\omega_0 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 x_1 \qquad\quad , \end{aligned} \tag{24}$$

das – in Matrizenform geschrieben –

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

die Orthogonalmatrix $\mathbf{I}$ in der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{K} = \mathbf{I}\omega_0 \tag{26}$$

erkennen läßt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\omega_0 \mathbf{x}. \tag{27}$$

Gl. (27) ist auch erfüllt, wenn man den Vektor $\mathbf{x}$ gemäß Gln. (15, 16) durch die Matrix $\mathbf{Z}$ ersetzt,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{I}\omega_0 \mathbf{Z}, \tag{28}$$

und liefert gemäß Gl. (4) die Gl. (22) als Lösung.

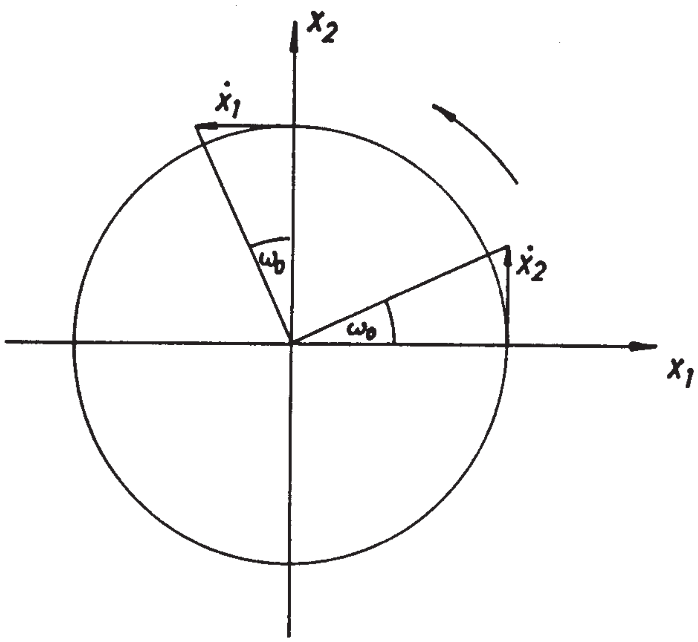

Bild 1

Da jedes Differentialgleichungssystem mit n Gleichungen 1. Ordnung in eine Differentialgleichung n-ter Ordnung verwandelt werden kann, folgt aus Gl. (24) durch Einsetzen unmittelbar Gl. (5). Desgleichen liefert die charakteristische Determinante $|\mathbf{1}s - \mathbf{K}|$ die charakteristische Gleichung (6):

$$|\mathbf{1}s - \mathbf{I}\omega_0| = \begin{vmatrix} s & -\omega_0 \\ \omega_0 & s \end{vmatrix} = s^2 + {\omega_0}^2 = 0. \tag{29}$$

Im Falle eines gedämpften Schwingsystems verringert sich die Geschwindigkeit jeweils um einen zur Achsenlänge proportionalen Betrag, so daß das Differentialgleichungssystem mit einer noch unbestimmten Kreisfrequenz ω die Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\varrho x_1 - \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \varrho x_2 \end{aligned} \tag{30}$$

annimmt. Die Koeffizientenmatrix ist hierin komplex:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{1}\varrho + \mathbf{I}\omega. \tag{31}$$

Die charakteristische Determinante ergibt nun

$$\begin{vmatrix} s+\varrho & -\omega \\ \omega & s+\varrho \end{vmatrix} = s^2 + 2\varrho s + \varrho^2 + \omega^2 = 0. \tag{32}$$

Der Vergleich mit GL (9) läßt erkennen, daß sich die Kreisfrequenz ω des gedämpften Systems von der Kreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems unterscheidet:

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 - \varrho^2. \tag{33}$$

Mit der Koeffizientenmatrix Gl. (31) lautet die Transformationsgleichung einer gedämpften Schwingung

$$\mathbf{Z}(t) = \exp[(-\mathbf{1}\varrho + \mathbf{I}\omega)t]\mathbf{Z}(0). \tag{34}$$

Wegen der Kommutativität der Matrizen kann man auch den Dämpfungsfaktor abspalten:

$$\mathbf{Z}(t) = \exp(-\mathbf{1}\varrho t)\exp(\mathbf{I}\omega t)\mathbf{Z}(0). \tag{35}$$

Dieser lässt sich dann als skalarer Faktor zu der Resolventenmatrix der ungedämpften periodischen Funktion Gl. (22), jedoch mit der Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω darstellen:

$$\mathbf{R}(t) = \exp(-\varrho t)\exp(\mathbf{I}\omega t). \tag{36}$$

5 Schwingungen bei zeitlich veränderlicher Koeffizientenmatrix

Das Schwingsystem kann zeitliche Veränderungen erfahren hinsichtlich der Kreisfrequenz ω – bei mechanischen Schwingern beispielsweise durch Massenverlust – und hinsichtlich der Dämpfung ϱ – bei elektrischen Schwingern beispielsweise durch Erwärmung des Widerstandes.
Erfolgt die erste Transformation bei einer Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}_1$ in der Zeit t_1,

$$\mathbf{Z}(t_1) = \exp(\mathbf{K}_1 t_1)\mathbf{Z}(0), \tag{37}$$

und die zweite Transformation bei der Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}_2$ in der Zeit t_2,

$$\mathbf{Z}(t_2) = \exp(\mathbf{K}_2 t_2)\mathbf{Z}(1) = \exp(\mathbf{K}_2 t_2)\exp(\mathbf{K}_1 t_1)\mathbf{Z}(0), \tag{38}$$

so werden die Transformationsmatrizen zu einer resultierenden Transformationsmatrix $\mathbf{R}_{res}$ multiplikativ zusammengefaßt, wobei wegen der Kommutativität dieser Matrizen gilt:

$$\mathbf{R}_{res}(t_1 + t_2) = \exp(\mathbf{K}_2 t_2)\exp(\mathbf{K}_1 t_1) = \exp(\mathbf{K}_1 t_1)\exp(\mathbf{K}_2 t_2) = \exp(\mathbf{K}_1 t_1 + \mathbf{K}_2 t_2). \tag{39}$$

Bei kontinuierlicher Veränderung von $\mathbf{K}(t)$ als Zeitfunktion würde im Falle der Nichtkommutativität der Matrizen das VOLTERRAsche Produktintegral

$$\mathbf{R}_{res}(t) = \mathop{\widehat{\int}}\nolimits_0^t \exp[\mathbf{K}(\tau)\ \mathrm{d}\tau] = \mathop{\widehat{\int}}\nolimits_0^t [\mathbf{1} + \mathbf{K}(\tau)\ \mathrm{d}\tau] \tag{40}$$

gelten; im vorliegenden Fall der Kommutativität aber vereinfacht sich die Beziehung (40) zu

$$\mathbf{R}_{res}(t) = \exp\Big[\int_0^t \mathbf{K}(\tau)\ \mathrm{d}\tau\Big]. \tag{41}$$

6 Erzwungene Schwingungen, Filterung, Resonanz

Eine äußere Einwirkung auf ein Schwingsystem führt zu einem erzwungenen Schwingvorgang, der durch die inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung beschrieben wird. Dabei muß das Inhomogenitätsglied der Art der physikalischen Kopplung zwischen der einwirkenden Größe und dem Schwingsystem entsprechen. Als konventionelle Lösung wird in der Lehrbuchliteratur im allgemeinen nur der Fall der Kopplung eines Schwingsystems mit einer periodischen Kraft $F_0 \cos \omega_a t$ angegeben; ω_a ist die aufgeprägte Kreisfrequenz. Die Lösung der Differentialgleichung (42) mit dem allgemeinen Inhomogenitätsglied $F(t)$ für eine beliebige zeitabhängige äußere Kraft kann man mit Hilfe der LAPLACE-Transformation finden. Mit $F_0/m \equiv B_0$, wobei B_0 als kraftanaloge Größe definiert wird, erhält man als Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\varrho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = B_0 \cos(\omega_a + \varphi). \tag{42}$$

Es sei bemerkt, daß auch noch weitere, nicht kraftanaloge Größen auf ein Schwingsystem einwirken können, z.B. impulsanaloge Größen; man unterscheidet dann Kraft- und/oder Impulskopplung.

In der Matrizensehreibweise lautet die inhomogene – hier gleich auf die konstante Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}$ und die komplexe Matrix $\mathbf{Z}(t)$ und ein Inhomogenitätsglied $\mathbf{P}(t)$ bezogene – lineare Differentialgleichung zu Gl. (1)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Z}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{K}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{P}(t). \tag{43}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist die Übergangsfunktion

$$Z(t) = \exp(\mathbf{K}t)\mathbf{Z}(0) + \exp(\mathbf{K}t)\int\limits_0^t \exp(-\mathbf{K}\tau)\mathbf{P}(\tau)\ \mathrm{d}\tau. \tag{44}$$

Der erste Summand beschreibt den von der äußeren Einwirkung unbeeinflußten Schwingungsvorgang, während in dem zweiten Summanden die Beeinflussung des Systems ausgedrückt ist. Für $t \to \infty$ verschwindet infolge der Dämpfung der erste Summand, dagegen stellt sich für den zweiten Summanden der stationäre Zustand ein, bei einem periodischen Inhomogenitätsglied beispielsweise als angeregte Dauerschwingung.

Während in dem Inhomogenitätsglied in Gl. (42) wegen des Differentialquotienten zweiter Ordnung eine kraftanaloge Größe angemessen ist, hat man für das Inhomogenitätsglied in Gl. (43) eine impulsanaloge Größe einzusetzen. Es ist ohne weiteres möglich, beliebige andere Größen in impulsanaloge Größen umzurechnen, wie weiter unten gezeigt wird. Das Verfahren soll im folgenden an einigen Beispielen demonstriert werden.

6.1 Konstantes Inhomogenitätsglied

Zu dem durch Gl. (43) ausgedrückten Impuls des gedämpften Schwingsystems tritt ein konstanter Betrag, der mit den der Zeit reziproken Größen σ und φ sowie der Anfangsauslenkung $\mathbf{Z}_0$ durch

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_a\mathbf{Z}_0 \tag{45}$$

gegeben ist. $\mathbf{K}_a$ bedeutet darin die Koeffizientenmatrix der aufgeprägten Einwirkung; sie ist ebenso wie die Matrix $\mathbf{K}$ von komplexer Natur,

$$\mathbf{K}_a = \begin{pmatrix} \sigma & -\varphi \\ \varphi & \sigma \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Mit Gl. (45) erhält man dann nach Gl. (44) die Lösung

$$\mathbf{Z}(t) = \exp(\mathbf{K}t)\mathbf{Z}(0) + [\mathbf{1} - \exp(\mathbf{K}t)]\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \tag{47}$$

als Übergangsfunktion, die eine gedämpfte Schwingung beschreibt, bei der sich der Ruhepunkt allmählich innerhalb des Koordinatensystems bis zu einer Endlage verschiebt.
Für die Endlage als stationärer Zustand folgt aus (47) mit Gl. (31) und $t \to \infty$

$$\mathbf{Z}_\infty = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} = \frac{1}{\varrho^2 + \omega^2}\mathbf{K}_a = \begin{pmatrix} \omega\varphi - \varrho\sigma & \varrho\varphi + \omega\sigma \\ -(\varrho\varphi + \omega\sigma) & \omega\varphi - \varrho\sigma \end{pmatrix}\mathbf{Z}_0, \tag{48}$$

also eine Größe ohne jegliche Zeitabhängigkeit. Die weitere Durchrechnung ergibt mit

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{1}x_0 \tag{49}$$

und Berücksichtigung von Gl. (18) für die Amplitude a_∞ der Endlage

$$a_\infty = \sqrt{|\mathbf{Z}_\infty|} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \varphi^2}{\varrho^2 + \omega^2}} x_0 = \sqrt{\frac{|\mathbf{K}_a|}{|\mathbf{K}|}} x_0. \tag{50}$$

6.2 Impulsanaloges, periodisches Inhomogenitätsglied

Die Einwirkung auf das Schwingsystem erfolgt durch einen periodischen Impuls mit der Kreisfrequenz der aufgeprägten Schwingung ω_a und dem Anfangsimpuls $\mathbf{C}$, der auch die Phase enthält:

$$P(t) = \exp(\mathbf{I}\omega_a t)\mathbf{C}. \tag{51}$$

Mit Gl. (51) ergibt Gl. (44) die Lösung

$$Z(t) = \exp(\mathbf{K}t)[Z(0) - (\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1}\mathbf{C}] + \exp(\mathbf{I}\omega_a t)[\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{C}, \tag{52}$$

wobei wiederum die Kommutativität der Matrizen $\mathbf{1}$, $\mathbf{I}$ und $\mathbf{K}$ ausgenutzt werden kann.
Der stationäre Zustand

$$Z_\infty(t) = (\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1} \exp(\mathbf{I}\omega_a t)\mathbf{C} \tag{53}$$

ist durch eine periodische Funktion $\exp(\mathbf{I}\omega_a t)$ gekennzeichnet; das System schwingt in der Frequenz der aufgeprägten Schwingung, aber mit veränderter, von ω_a abhängiger Amplitude.
Der Amplitudenfaktor im zweiten Summanden von Gl. (52)

$$(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1}\mathbf{C} = \frac{1}{\omega^2 + \varrho^2} \begin{pmatrix} \varrho & -(\omega - \omega_a) \\ (\omega - \omega_a) & \varrho \end{pmatrix} \mathbf{C} = -\frac{1}{\omega^2 + \varrho^2}(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)\mathbf{C}, \tag{54}$$

worin $\mathbf{K}^*$ die konjugiert-komplexe Matrix zu $\mathbf{K}$ ist, gibt Auskunft über Amplitude und Phasenverschiebung.
Das der Schwingleistung proportionale Amplitudenquadrat findet man durch Bildung der Determinante des zweiten Summanden von Gl. (52) bzw. (54). Mit Gl. (23), Gl. (31) und $\mathbf{C} = \mathbf{1}c$ folgt dann

$$a_\infty^2 = \frac{c^2}{\varrho^2 + (\omega - \omega_a)^2}, \tag{55}$$

also das symmetrische Resonanzprofil einer LORENTZ-Funktion mit dem Maximum bei der Frequenz ω des gedämpften Systems

$$\omega_{a\ \max} = \sqrt{{\omega_a}^2 - \varrho^2}. \tag{56}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich durch Bildung des Quotienten der Elemente der ersten Spalte von Gl. (54) gemäß Gl. (21)

$$\tan\varphi = \frac{\omega - \omega_a}{\varrho} \tag{57}$$

Im Resonanzfall $\omega = \omega_a$ ist die Phasenverschiebung $\varphi = 0$, für $\omega_a \to 0$ beträgt sie $\varphi = \arctan\frac{\omega}{\varrho}$, und für $\omega_a \to \infty$ ist sie $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man auch durch Anwendung der FOURIER-Transformation auf die Resolvente der gedämpften Schwingung

$$\mathbf{R}(t) = \exp(\mathbf{K}t). \tag{58}$$

Das einseitige FOURIER-Integral in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{F}(\omega_a) = \int_0^\infty \exp(-\mathbf{I}\omega_a t)\mathbf{S}(t)\ \mathrm{d}t \tag{59}$$

ergibt mit Gl. (58) und $\mathbf{S} = \mathbf{R}\ \mathbf{C}$

$$\mathbf{F}(\omega_a) = (\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1}\mathbf{C}, \tag{60}$$

also den Amplitudenfaktor zu der periodischen Funktion $\exp(\mathbf{I}\omega_a)t$ in Gl. (52).

Die FOURIER-Transformation entspricht offenbar dem Fall, daß die Einwirkung auf das Schwingsystem durch eine periodische, impulsanaloge Größe erfolgt. In einem mechanischen System würde das einer Impulskopplung entsprechen, die hiermit klar von der Kraftkopplung gemäß Gl. (42) unterschieden wird.

Die Matrizenschreibweise eröffnet somit eine klarere Einsicht in die physikalischen Zusammenhänge der verschiedenen Kopplungsarten, als es mit der herkömmlichen Behandlung dieses Problems möglich war. Durch die Impulskopplung werden vor allem auch solche physikalisch wichtigen Systeme erfaßt, die ein aperiodisches Verhalten mit der Eigenfrequenz $\omega = 0$ zeigen, z.B. elektronische Tiefpässe.

6.3 Kraftanaloges, periodisches Inhomogenitätsglied

Die Differentialgleichung (43) verlangt ein impulsanaloges Inhomogenitätsglied. Wenn dies nicht von vornherein – wie z.B. in den Fällen 6.1. und 6.2. – gegeben ist, muß eine Umrechnung in die adäquate Impulsgröße durchgeführt werden. Für die Kraftkopplung findet man diese Größe folgendermaßen: Man setzt das inhomogene Gleichungssystem - entsprechend Gl. (30) – mit den zunächst noch unbekannten Inhomogenitätskoeffizienten f_1 und f_2 an,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\varrho x_1 - \omega x_2 + f_1 \\ \dot{x}_2 &= \ \ \omega x_1 - \varrho x_2 + f_2 \end{aligned} \tag{61}$$

und erhält daraus durch gegenseitige Substitution beider Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\varrho\dot{x}_1 + (\omega^2 + \varrho^2)x_1 &= \dot{f}_1 + \varrho f_1 - \omega f_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\varrho\dot{x}_2 + (\omega^2 + \varrho^2)x_2 &= \dot{f}_2 + \omega f_1 - \varrho f_2. \end{aligned} \tag{62}$$

Für die linke Seite kann man bei der Kraftkopplung nach Gl. (42) eine periodische Funktion mit beliebiger Phasenverschiebung φ einsetzen. Mit den Funktionen $B_0 \cos\omega_a t$ und $B_0 \sin\omega_a t$ erhält man das System

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -\varrho f_1 + \omega f_2 + B_0 \cos\omega_a t \\ \dot{f}_2 &= -\ \ \omega f_1 - \varrho f_2 + B_0 \sin\omega_a t \end{aligned} \tag{63}$$

oder – ergänzt zu einer Matrizengleichung –

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{K}^* \mathbf{f} + B_0 \exp(\mathbf{I}\omega_a t), \tag{64}$$

worin

$$\mathbf{K}^* = \begin{pmatrix} -\varrho & \omega \\ -\omega & -\varrho \end{pmatrix} \tag{65}$$

die konjugiert-komplexe Koeffizientenmatrix zu K nach Gl. (31) ist:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\varrho & -\omega \\ \omega & -\varrho \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Die Lösung von Gl. (64) – entsprechend Gl. (52) – ergibt sich nach Gl. (44) zu

$$\mathbf{f}(t) = \exp(\mathbf{K}^* t)[\mathbf{f}(0) - (\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)^{-1} B_0] + B_0 \exp(\mathbf{I}\omega_a t)(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)^{-1}. \tag{67}$$

Das Inhomogenitätsglied bei Kraftkopplung lautet somit für den stationären Fall

$$\mathbf{P}(t) = B_0 \exp(\mathbf{I}\omega_a t)(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)^{-1}. \tag{68}$$

Führt man Gl. (68) in Gl. (44) ein, so erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t) = \exp(\mathbf{K}t)[\mathbf{Z}(0) - (\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)^{-1}(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1} B_0] + \\ + B_0 \exp(\mathbf{I}\omega_a t)(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)^{-1}(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1}. \end{aligned} \tag{69}$$

Hierin ist das reziproke Produkt

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K}^*)^{-1}(\mathbf{I}\omega_a - \mathbf{K})^{-1} &= [-\mathbf{1}{\omega_a}^2 - \mathbf{I}\omega_a(\mathbf{K}^* + \mathbf{K}) + \mathbf{K}^*\mathbf{K}]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho^2 + \omega^2 - {\omega_a}^2 & -2\varrho\omega_a \\ 2\varrho\omega_a & \varrho^2 + \omega^2 - {\omega_a}^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \frac{1}{(\varrho^2 + \omega^2 + {\omega_a}^2)^2 + 4\varrho^2{\omega_a}^2} & \begin{pmatrix} \varrho^2 + \omega^2 - {\omega_a}^2 & 2\varrho\omega_a \\ -2\varrho\omega_a & \varrho^2 + \omega^2 - {\omega_a}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{70}$$

und somit das Amplitudenquadrat als Determinante des stationären Summanden von Gl. (69)

$$a^2 = \frac{{B_0}^2}{(\varrho^2 + \omega^2 + {\omega_a}^2)^2 + 4\varrho^2{\omega_a}^2}. \tag{71}$$

Diese Beziehung stimmt – wenn man noch die Kreisfrequenz des ungedämpften Systems ${\omega_0}^2 = \varrho^2 + \omega^2$ nach Gl. (33) einführt – mit der Darstellung in einschlägigen Lehrbüchern überein.
Man erhält die unsymmetrische Resonanzkurve eines durch Kraftkopplung erregten Schwingsystems, dessen Maximum bei

$$\omega_{a_{\max}} = \sqrt{\omega^2 - \varrho^2} = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\varrho^2} \tag{72}$$

liegt, das somit noch weiter in Richtung kleinerer Frequenzen verschoben ist als das Maximum im Falle der Impulskopplung nach 6.2.

Die Phasenverschiebung ist bei Kraftkopplung gemäß Gl. (21) der Quotient der Elemente der ersten Spalte von Gl. (70),

$$\tan\varphi = -\frac{2\varrho\omega_a}{\varrho^2 + \omega^2 - {\omega_a}^2} = -\frac{2\varrho\omega_a}{{\omega_0}^2 - {\omega_a}^2}. \tag{73}$$

Sie beträgt für $\omega_a = \omega_0 \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$, für $\omega_a = 0 \quad \varphi = 0$ und für $\omega_a \to \infty \quad \varphi = -\pi$ und unterscheidet sich damit von der Resonanz bei Impulskopplung nach 6.2. um etwa $-\frac{\pi}{2}$. Im Resonanzfall nach Gl. (72) ist die Phasenverschiebung

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{{\omega_0}^2 - 2\varrho^2}}{\varrho}. \tag{74}$$

7 Abschließende Bemerkung

Für die Behandlung gekoppelter Oszillatoren erweisen sich die Matrizen-Differentialgleichungssysteme als besonders zweckmäßig. Es ist damit prinzipiell möglich, beliebig viele gekoppelte Oszillatoren, etwa als Atome in Molekülen oder in Kristallen, zu beschreiben und zu berechnen; hierbei sind auch variable Kopplungen sowohl zwischen linearen (kettenartigen) oder flächenhaften bzw. räumlich angeordneten Oszillatoren darstellbar.

Literatur

[1] *Gerth, E.*: Analytische Darstellung der Kinetik des Keimaufbaus beim photographischen Prozeß. Diss. (B) TU Dresden 1972

[2] *Gerth, E.*: Analytische Darstellung der photographischen Schwärzungsfunktion mit Hilfe von Matrixfunktionen. Annalen der Physik 7. Folge **27** (1971), 126

[3] *Melcher, H., E. Gerth*: Behandlung von Strahlungstransportproblemen mit Matrixfunktionen. Wiss. Z. Päd. Hochschule ,,Dr. Theodor Neubauer“ Erfurt-Mühlhausen, Math.-Naturw. Reihe **8** (1972), Heft l, 3

[4] *Melcher, H., E. Gerth*: Lösung des stationären Strahlungstransportproblems für Energiestreuung mit Hilfe von Matrizenfunktionen. Kernenergie **16** (1973), 47

[5] *Melcher, H., E. Gerth*: Analytische Behandlung und numerische Berechnung der Umwandlungsreihen von Radionukliden mit Hilfe von Matrizenfunktionen. Wiss. Z. Päd. Hochschule ,,Dr. Theodor Neubauer“ Erfurt-Mühlhausen. Math.-Naturw. Reihe, **9** (1973), Heft 2, 21

Prof. Dr. rer. nat. habil. Horst Melcher,
Sektion Mathematik-Physik

Dr. sc. nat. Ewald Gerth,
DDR - 15 Potsdam
Prof.-Ludschuweit-Allee 11

Bemerkung im Jahre 2008: Der vorliegende Artikel wurde mittels der modernen Computertechnik mit Schriftanalyse aufgenommen und textgetreu wiedergegeben. Die Textverarbeitung mit dem Setzprogramm LaTeX 2e erforderte die Anpassung der Symbole für Vektoren und Matrizen an die international gültige Schreibweise und einen Umbruch des Textes mit Veränderung der Paginierung bis auf die Anfangsseite.

Oscillations represented as a transformation problem of matrix functions

Horst Melcher[1] and Ewald Gerth[2]

[1] *Pedagogic College ,,Dr.Theodor Neubauer", Erfurt-Mühlhausen, GDR*
[2] *Central Institute for Astrophysics of the Academy of Sciences of the GDR, Potsdam*

Abstract

Oscillations are usually represented as the solution of a differential equation of second order. From this conventional form of the solution, it is not evident at once that the oscillating system goes over from a state at the beginning to a state at a later time by transformation of the components. In the here referred article it is demonstrated, that oscillations can definitely be characterized as a problem of transformation by means of matrices, which reproduces completely the classical solution of the oscillation differential equation. The oscillation is regarded as a reaction process, which is simulated in a functional sequence of small steps establishing the resolving matrix by expansion of a matrix exponential series. There is no need for the solution of any eigenvalue problem. The application of matrices, moreover, proves to be especially suitable for the analytical treatment and numerical calculation of coupled oscillators. Coupling is investigated by the resonance of an oscillator on excitation of external oscillations. By this way one can describe even extended systems of coupled oscillators like atoms and molecules in a crystal lattice in different mutual relations and spatial arrangements. The matrix version to treatise oscillation processes offers the advantage that it could be adjusted to the well-developed methods of the solution of interacting reaction systems, the calculating algorithms of which are already at disposition. In such a reaction system an oscillator is represented as a reacting component by a two-row elementary submatrix of the type of PAULI's spin matrices. Thus, also the combination with other – e.g., physical, chemical, or biological – reaction systems and the simultaneous solution of them is possible.

Publication

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE
,,DR. THEODOR NEUBAUER" ERFURT-MÜHLHAUSEN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe, 11. Jahrgang 1975, Heft 2, S. 67–71
Eingegangen am 10. 5. 1975

SCIENTIFIC JOURNAL OF THE PEDAGOGIC COLLEGE
"DR. THEODOR NEUBAUER" ERFURT-MÜHLHAUSEN
Mathematical-scientific row, 11. Year 1975, Volume 2, p. 67–71
Received 1975, May 10^{th}

Article available in German by the web-address: `www.ewald-gerth.de/46.pdf`

Institution of the authors in 1975

Professor Dr. rer. nat. habil. Horst Melcher
Pedagogic College "Dr. Theodor Neubauer" Erfurt-Mühlhausen,
leader of the scientific area of Experimental Physics I
of the section Mathematics/Physics

Dr. sc. nat. Ewald Gerth
Central Institute of Astrophysics of the Academy of Sciences of the GDR,
Potsdam, East Germany

(Abstract - reworked and actualized by E. Gerth in December 2012)

The article is contained in a book edited by E. Gerth in 2014:

Horst Melcher and Ewald Gerth:
Seven articles on reaction kinetics
in application to atomic and nuclear physics, radiative transfer,
oscillations, spectral line-profiles, pharmacokinetics

Herbert Utz Verlag GmbH, Munich
ISBN 978-3-8316-4403-2
Pages: 58–84