Kernenergie 16. Jahrgang · Heft 2/1973, S. 47–52

Lösung des stationären Strahlungstransportproblems für Energiestreuung mit Hilfe von Matrizenfunktionen

H. Melcher, E. Gerth

(Pädagogische Hochschule Dr. Theodor Neubauer, Sektion Mathematik/Physik. Erfurt.[1]) und Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Astrophysik[2]))

Die Transportgleichung für den Fall einer stationären, geradlinigen Strahlungsausbreitung mit reiner Energiestreuung wird als unendliche Matrizengleichung formuliert und gelöst. Mit Hilfe des Matrizenformalismus werden der Transformationscharakter und die Nichtkommutativität der Transmission der Strahlung durch zusammengesetzte, heterogene Materieschichten erklärt sowie eine übersichtliche analytische Darstellung der Transmission divergierender Strahlenbündel gegeben. Des weiteren werden einfache Beziehungen für den Strahlungsfluß, die mittlere Reichweite und die Zählrate aufgestellt.[3]

Keywords:
absorption energy interactions matrices Boltzmann equation
energy range mathematical methods radiations scattering

Die Boltzmannsche Integrodifferentialgleichung des Strahlungstransportes erwies sich bisher nur für eine Reihe von Spezialfällen, bei denen bestimmte Vereinfachungen und Näherungen vorgenommen wurden, als lösbar [1· · ·9]. Nachfolgend wird gezeigt, daß im Falle der Transmission von Strahlung durch absorbierende Materieschichten bei alleiniger Energiestreuung (unter Vernachlässigung der räumlichen Winkelstreuung) eine einfache analytische Lösung des Problems möglich ist, die durch Einführung von Matrizenfunktionen in eine übersichtliche und für weitere Deduktionen geeignete Form gebracht werden kann.

1 Darstellung der Strahlungstransmission durch Integraltransformationen

Die Strahlungstransportgleichung für einen kräfte- und quellenfreien, homogenen, stationären Strahlungsfluß, der eine homogene Materieschicht ohne Winkelstreuung durchsetzt, lautet [8· · ·10]

$$\frac{\partial\varphi(E',x)}{\partial x} = -\varphi(E',x)\int_0^{E'} N\sigma^*(E,E')\,\mathrm{d}E + \int_{E'}^{\infty} N\sigma^*(E,E')\,\varphi(E,x)\,\mathrm{d}E. \tag{1}$$

Die in Gleichung (1) enthaltenen Größen bedeuten: E die Energie vor und E' die Energie nach dem Streuakt, x die Koordinate in der Ausbreitungsrichtung der Strahlung, N die Anzahl der Atome in der Volumeneinheit der durchstrahlten Materie, $\varphi(E)$ die energetische Strahlungsflußverteilung und $\mathrm{d}\sigma(E',E) = \sigma^*(E',E)\mathrm{d}E$ der differentielle Wirkungsquerschnitt für den energetischen Übergang $E \to E'$.

[1]Anschrift: DDR 501 Erfurt, Nordhäuser Straße 63.
[2]Anschrift: DDR 15 Potsdam, Telegrafenberg.
[3]Abstract: `www.ewald-gerth.de/42abs.pdf` – attached at the end of this article (page 59).

Bei dem betrachteten physikalischen Problem erfolgen nur Energieänderungen von höheren zu niedrigeren Energiezuständen der Strahlungspartikeln, so daß $\sigma^*(E',E) = 0$ für $E \leqq E'$ ist. Mit Hilfe der DIRACschen Deltafunktion $\delta(E',E)$ für zwei unabhängige Variable und der den Übergang nach niedrigeren Energien als E' kennzeichnenden Integrationsvariablen E'' lassen sich die beiden Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (1) zu dem Kern

$$K(E',E) = -\delta(E',E) \int\limits_0^{E'} N\sigma^*(E'',E')\ \mathrm{d}E'' + N\sigma^*(E',E) \tag{2}$$

der homogenen Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\ \varphi(E',x) = \int\limits_0^{\infty} K(E',E)\ \varphi(E,x)\ \mathrm{d}E \tag{3}$$

zusammenfassen, die durch Integration unter Hinzufügen der Anfangsverteilung des Strahlungsflusses $\varphi(E,0)$ als Integrationskonstante in die äquivalente Integralgleichung

$$\varphi(E',x) = \varphi(E',0) + \int\limits_0^{x} \int\limits_0^{\infty} K(E',E)\ \varphi(E,\xi)\ \mathrm{d}E\ \mathrm{d}\xi \tag{4}$$

übergeht. Gleichung (4) ist eine zweidimensionale, lineare Integralgleichung zweiter Art, die bezüglich der Variablen x vom VOLTERRAschen Typ und bezüglich der Variablen E vom FREDHOLMschen Typ ist. Die Lösung dieser Integralgleichung läßt sich mit Hilfe der Resolvente $\Gamma(E',E,x)$ durch die Gleichung [11, 12]

$$\varphi(E',x) = \varphi(E',0) + \int\limits_0^{\infty} \Gamma(E',E,x)\ \varphi(E,0)\ \mathrm{d}E \tag{5}$$

ausdrücken, die nach Zusammenfassung der Resolvente mit der Deltafunktion zu einer GREENschen Funktion

$$T(E',E,x) = \delta(E',E) + \Gamma(E',E,x) \tag{6}$$

als Integraltransformation

$$\varphi(E',x) = \int\limits_0^{\infty} T(E',E,x)\ \varphi(E,0)\ \mathrm{d}E \tag{7}$$

dargestellt werden kann.

Die Integraltransformation liefert somit einen einfachen Zusammenhang zwischen den energetischen Strahlungsflußverteilungen vor und nach der Transmission durch eine homogene Materieschicht. Bei komplizierteren Transmissionsproblemen, beispielsweise bereits bei Mehrfachtransmissionen, erweist sich jedoch die Integraltransformation als ein schwerfälliger mathematischer Formalismus [10]. Der (reversible) Ersatz der Integraltransformationen durch Matrizentransformationen ermöglicht eine wesentliche Vereinfachung der analytischen Symbolik, wodurch gleichzeitig auch neue Einsichten in die physikalischen Zusammenhänge gewonnen werden.

2 Darstellung der Strahlungstransmission durch Matrizentransformationen

Eine Integralgleichung kann als ein unendliches System linearer Gleichungen aufgefaßt werden [11]. Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems entspricht der Kernfunktion, und der Vektor der unabhängigen Variablen entspricht der gesuchten Funktion der Integralgleichung.
Mit den Ersetzungen durch unendliche Matrizen und Vektoren,

$$K(E', E) \triangleq \mathbf{K}, \quad \varphi(E) \triangleq \mathbf{f}, \tag{8}$$

läßt sich die Integrodifferentialgleichung (3) als homogene Matrizendifferentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{f}(x) = \mathbf{K}\mathbf{f}(x) \tag{9}$$

schreiben, die nach der Integration mit dem Anfangsvektor $\mathbf{f}(0)$ in die äquivalente Volterrasche Integralgleichung

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(0) + \int_0^x \mathbf{K}\mathbf{f}(\xi)\ \mathrm{d}\xi \tag{10}$$

übergeht.

In dieser Schreibweise ist die Energieabhängigkeit durch die Matrixstruktur festgelegt, so daß nur noch die Abhängigkeit von der Ortsvariablen x gekennzeichnet zu werden braucht.

Die Integralgleichung (10) mit entarteter (konstanter) Kernmatrix läßt sich durch Iteration lösen, indem man die Neumannsche Reihe entwickelt. Man erhält dann für die Strahlungstransmission durch eine homogene Schicht die Matrix-Transformationsgleichung

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{T}(x)\mathbf{f}(0) \tag{11}$$

und in einer Reihenentwicklung mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ die Transformationsmatrix („Transmissionsmatrix“) als Resolvente

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{1} + \mathbf{K}x + \frac{1}{2!}\mathbf{K}^2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\mathbf{K}^i x^i, \tag{12}$$

die in Form der Matrix-Exponentialfunktion (vgl. [17])

$$\mathbf{T}(x) = \mathrm{e}^{\mathbf{K}x} \tag{13}$$

geschrieben werden kann.

3 Verallgemeinerung des Lenardschen Transmissionsgesetzes

Von LENARD [13] wurde für die Transmission monoenergetischer Strahlung durch eine Materieschicht der Dicke x ein durch den linearen Schwächungskoeffizienten μ bestimmtes, exponentielles Schwächungsgesetz des Strahlungsflusses Φ gefordert,

$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{-\mu x}\,\Phi(0). \tag{14}$$

Die insbesondere bei Elektronenstrahlen auftretenden Abweichungen von diesem Gesetz wurden auf die Abnahme der Geschwindigkeit der Teilchen beim Eindringen in die Schicht zurückgeführt. Viele Versuche wurden unternommen, um im Falle der Elektronenstrahlen das Exponentialgesetz durch Korrektionen u. ä. doch noch zu „retten“.
In der Matrizenschreibweise ergibt sich nach Gleichung (11) und (13) ein Exponentialgesetz:

$$\mathbf{f}(x) = \mathrm{e}^{\mathbf{K}x}\ \mathbf{f}(0) \tag{15}$$

das formal dem LENARDschen Transmissionsgesetz Gleichung (14) entspricht, aber darüber hinaus allgemein für ein ganzes Energiespektrum gilt.

4 Die Diskretisierung der Strahlungstransportgleichung

Für praktische Berechnungen der Strahlungstransmission sind die durch Gleichung (8a, 6) definierten Umwandlungen der Kernfunktion in eine unendliche quadratische Matrix und der energetischen Strahlungsflußverteilung in einen unendlichen Vektor undurchführbar. Um zu konkreten Werten übergehen zu können, muß man die Ordnung der Matrix und die Anzahl der Komponenten des Vektors auf eine endliche Größe n beschränken. Dies wird durch die Begrenzung des Definitionsbereiches der Funktionen $K(E', E)$ und $\varphi(E)$ sowie durch die Diskretisierung erreicht, indem für die Folgen der Energieintervalle Integrale der Funktionswerte gebildet werden. Der Strahlungsfluß für das Energieintervall ΔE_i ist

$$\Delta\Phi_i = \int\limits_{E_{i-1}}^{E_i} \varphi(E)\ \mathrm{d}E = f_i, \tag{16}$$

wobei f_i die i-te Komponente des Strahlungsflußvektors bezeichnet.
Mit den Integralen über die einzelnen Felder der schachbrettartig aufgeteilten Kernfunktion

$$\begin{aligned}
K_{ik} &= \frac{1}{\triangle E_i}\int\limits_{E_{i-1}}^{E_i}\int\limits_{E_0}^{E_i} N\sigma^*(E, E')\ \ \mathrm{d}E\ \mathrm{d}E' && \text{für} \quad i = k \\
K_{ik} &= \frac{1}{\triangle E_k}\int\limits_{E_{i-1}}^{E_i}\int\limits_{E_{k-1}}^{E_k} N\sigma^*(E', E)\ \ \mathrm{d}E'\mathrm{d}E && \text{für} \quad i < k \\
K_{ik} &= 0 && \text{für} \quad i > k
\end{aligned} \tag{17}$$

ergibt sich aus Gleichung (1) die i-te Gleichung eines D'ALEMBERTschen Differentialgleichungssystems als Näherung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} K_{ik} f_k(x). \tag{18}$$

Gleichung (18) läßt sich mit der Matrix $\mathbf{K} = (K_{ik})$ und dem Vektor $\mathbf{f} = (f_i)$ durch Gleichung (9) ausdrücken.

Mit der Diskretisierung ist ein Verlust an Genauigkeit verbunden. Bei praktischen Rechnungen ist ein Kompromiß zwischen dem Feinheitsgrad der Diskretisierung und dem Rechenaufwand zu schließen.

5 Zur analytischen Lösung des d'Alembertschen Systems

Von den bekannten Methoden zur Lösung der durch die Diskretisierung erhaltenen Matrizendifferentialgleichungen endlicher Ordnung kommen für eine rationelle analytische und die darauf aufbauende numerische Behandlung nur solche Methoden in Betracht, die eine unmittelbare Lösung des Anfangswertproblems gestatten. Dies trifft für Gleichung (15) zu.

Bei einem weiteren Lösungsverfahren wird von der LAPLACE-Transformation Gebrauch gemacht. Die LAPLACE-Transformierte der Matrix-Exponentialfunktion Gleichung (13) folgt aus der Beziehung

$$\mathbf{T}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathbf{1}sx} \mathrm{e}^{-\mathbf{K}x} \, \mathrm{d}x = (\mathbf{1}s - \mathbf{K})^{-1} \tag{19}$$

mit s als der unabhängigen komplexen Variablen im Bildraum der Transformation.

Als ein günstiger Umstand erweist es sich im Falle der Strahlungstransmission, daß wegen der einseitig gerichteten Energiestreuung $E \to E'$ alle auftretenden Matrizen Dreiecksmatrizen sind, so daß sich das Eigenwertspektrum unmittelbar aus den Hauptdiagonalelementen der Kernmatrix entnehmen läßt.

Für viele analytische Operationen mit den Transformationsmatrizen sind Folgerungen aus einem Lösungsverfahren wichtig, bei dem eine Diagonalisierung der quadratischen Matrizen durch Ähnlichkeitstransformationen durchgeführt wird [15, 16]. So erhält man aus der Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}$ eine Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ durch die Ähnlichkeitstransformation mit der quadratischen Matrix $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U}, \tag{20}$$

wobei die Spalten der Matrix $\mathbf{U}$ ein Fundamentalsystem linear unabhängiger Eigenvektoren $\mathbf{u}_i$ zu den Eigenwerten s_i bilden. Eine entsprechende Beziehung gilt auch für die Resolventenmatrix,

$$\mathrm{e}^{\mathbf{D}x} = \mathbf{U}^{-1}\mathrm{e}^{\mathbf{K}x}\mathbf{U}. \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (20) und (21) folgt, daß die Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}$, die Resolventenmatrix $\mathrm{e}^{\mathbf{K}x}$ und ihre reziproken Matrizen sowie alle weiteren durch lineare Operationen daraus hervorgehenden Matrizen wegen der Kommutativität der Diagonalmatrizen miteinander kommutativ sind. So erhält man beispielsweise

$$\mathbf{K}\mathrm{e}^{\mathbf{K}x} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathrm{e}^{\mathbf{D}x}\mathbf{U}^{-1} = \mathrm{e}^{\mathbf{K}x}\mathbf{K}. \tag{22}$$

6 Einige Folgerungen aus der Matrizendarstellung der Transportgleichung

6.1 Der Transformationscharakter der mit Energiestreuung verbundenen Strahlungstransmission

Die Transmission der Strahlung wird nach Gleichung (11) und (15) durch eine lineare Transformation des Vektors der energetischen Strahlungsfluß verteilung beschrieben. Die Transformation kann von beliebigen Anfangsverteilungen ausgehen. Dies ist z. B. gerade bei der Untersuchung der Spektren der β-Strahlung von besonderer Bedeutung, da diese von vornherein eine breit aufgefächerte energetische Verteilung aufweisen.

Mehrfachtransmissionen lassen sich als Transformation des Anfangsvektors mit dem resultierenden Produkt $\mathbf{T}_{res}$ der einzelnen Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_i$ beschreiben,

$$\mathbf{T}_{res}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \mathbf{T}_n(x_n)\cdots\mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{T}_1(x_1). \tag{23}$$

Für eine inhomogene Schicht, bei der $\mathbf{K}(x)$ eine Funktion des geradlinigen Transmissionsweges x ist, kann man die resultierende Transformationsmatrix durch das VOLTERRAsche Produktintegral [15] angeben:

$$\mathbf{T}(x) = \overset{\frown}{\int_0^x}[\mathbf{1} + \mathbf{K}(\xi)\ \mathrm{d}\xi] = \overset{\frown}{\int_0^x} \mathrm{e}^{\mathbf{K}(\xi)\ \mathrm{d}\xi}. \tag{24}$$

Die Transformation ist umkehrbar. Durch Transformation eines Ergebnisvektors f(x) mit der reziproken Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}^{-1}(x) = \mathbf{T}(-x) \tag{25}$$

erhält man den Anfangsvektor $\mathbf{f}(0)$.

6.2 Die Nichtkommutativität der Transmission bei heterogenen Mehrfachschichten

Die Nichtkommutativität der Transmission von Strahlungen durch hintereinander angeordnete Schichten verschiedenen Materials kann mit Hilfe von Matrizen besonders einfach dargestellt werden. Für zwei Schichten mit den zugeordneten Kernmatrizen $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ sowie den Dicken x_1 und x_2 ist die Vertauschungsrelation im allgemeinen nicht erfüllt:

$$\mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{T}_1(x_1) - \mathbf{T}_1(x_1)\mathbf{T}_2(x_2) \neq \mathbf{0}. \tag{26}$$

Die Kommutativität der Transformationsmatrizen setzt die Kommutativität der Kernmatrizen voraus, was unmittelbar aus der Anwendung von Gleichung (20) und (21) auf Gleichung (26) folgt.

Im Grenzfall sehr dünner Schichten wird die Nichtkommutativität aufgehoben. Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}(\Delta x)$ läßt sich dann näherungsweise durch die nach dem zweiten Gliede abgebrochene Reihe Gleichung (12)

$$\mathbf{T}(\Delta x) \approx \mathbf{1} + \mathbf{K}\Delta x \tag{27}$$

darstellen. Somit gilt für zwei dünne Schichten der Dicke Δx_1 und Δx_2 unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\mathbf{T}_2(\Delta x_2)\mathbf{T}_1(\Delta x_1) \approx \mathbf{1} + \mathbf{K}_1\Delta x_1 + \mathbf{K}_2\Delta x_2. \tag{28}$$

Bei einem homogen gemischten Medium heterogener Anteile η_1 und η_2 an der Gesamtschicht der Dicke x ergibt sich im infinitesimalen Grenzfall für die resultierende Kernmatrix

$$\mathbf{K}_{res} = \eta_1\mathbf{K}_1 + \eta_2\mathbf{K}_2, \tag{29}$$

was gleichbedeutend mit der Aussage ist, daß es bei der energetischen Streuung in der Schicht verschiedene Möglichkeiten gibt, die als eine Entweder-Oder-Wahrscheinlichkeit bereits bei der Formulierung der Transportgleichung (1) in Gestalt der Summe der zu den Bestandteilen des Streumediums zugeordneten Wirkungsquerschnitte berücksichtigt werden kann.

6.3 Zählrate und energieabhängige Nachweiswahrscheinlichkeit

Die Zählrate wird durch den Anteil des Strahlungsflusses bestimmt, der im empfindlichen Volumen eines Strahlungsdetektors auf Grund von Wechselwirkungen nachgewiesen wird. Die energieabhängige Nachweiswahrscheinlichkeit wird in der Matrizenschreibweise durch einen Zeilenvektor $\mathbf{w}$ ausgedrückt. Die Zählrate z ist dann das Skalarprodukt des Zeilenvektors $\mathbf{w}$ mit dem Spaltenvektor $\mathbf{f}$ der Strahlungsflußverteilung:

$$z = \mathbf{w}\,\mathbf{f}. \tag{30}$$

Nach der Transmission der Strahlung durch eine Schicht gilt für die Zählrate mit Gleichung (11)

$$z(x) = \mathbf{w}\,\mathbf{T}(x)\,\mathbf{f}(0). \tag{31}$$

6.4 Der transmittierte Strahlungsfluß

Der gesamte Strahlungsfluß CP ergibt sich durch Summation aller seiner Bestandteile. Zu diesem Zweck wird anstelle des Zeilenvektors $\mathbf{w}$ ein Einsvektor $\mathbf{e}$, der für jeden Energiewert die Nachweiswahrscheinlichkeit 1 besitzt, eingeführt. Entsprechend Gleichung (30) ist dann der Strahlungsfluß gegeben durch

$$\varPhi = \mathbf{e}\,\mathbf{f} \tag{32}$$

und nach der Transmission durch

$$\varPhi(x) = \mathbf{e}\,\mathbf{T}(\mathrm{x})\,\mathbf{f}(0). \tag{33}$$

6.5 Definition einer mittleren Reichweite

Im Gegensatz zu den bisher üblichen Definitionen der Reichweite einer Strahlung [14], die von mehr oder weniger künstlichen Konstruktionen an empirischen Transmissionskurven ausgehen, wird hier eine Reichweitedefinition eingeführt, der der Mittelwertsatz der Integralrechnung zugrunde liegt:

$$\overline{x} = \frac{1}{\varPhi(0)} \int\limits_0^\infty \varPhi(x)\ \mathrm{d}x. \tag{34}$$

Durch Einführung von Gleichung (32) und (33) erhält man hieraus mit Gleichung (13)

$$\overline{x} = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{ef}(0)} \frac{1}{\Phi(0)} \int_0^\infty \mathbf{T}\,\mathrm{d}x\,\mathbf{f}(0) = \frac{\mathbf{eK}^{-1}\mathbf{f}(0)}{\mathbf{ef}(0)}. \tag{35}$$

Die über eine unendliche dicke, homogene Schicht erstreckte Integration der Matrixfunktion $\mathbf{T}(x) = \mathbf{e}^{\mathbf{K}x}$ ergibt die negative reziproke Kernmatrix:

$$\int_0^\infty \mathbf{T}\,\mathrm{d}x = -\mathbf{K}^{-1}. \tag{36}$$

die bei einem diskretisierten Problem stets gebildet werden kann. Bei einem nichtdiskreten Problem hängt die Invertierbarkeit von der Art der Kernfunktion ab [11].

Für ein in [14] angegebenes Reaktionssystem, bei dem die Reihe der diskretisierten Energiezustände in einer Markowschen Kette durchlaufen wird, was einem sukzessiven Energieverlust von Stufe zu Stufe entspricht, lautet die Kernmatrix

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu_2 & \mu_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_n \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Hieraus ergibt sich die reziproke Kernmatrix zu

$$\mathsf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_1} & -\frac{1}{\mu_1} & -\frac{1}{\mu_1} & \dots & -\frac{1}{\mu_1} \\ 0 & -\frac{1}{\mu_2} & -\frac{1}{\mu_2} & \dots & -\frac{1}{\mu_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_3} & \dots & -\frac{1}{\mu_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\mu_n} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Zur Berechnung der mittleren Reichweite $\overline{x}_k$ einer monoenergetischen Strahlung des Energieindex k ist in Gleichung (35) ein Vektor $\mathbf{f}(0)$ einzusetzen, der aus nur einem von Null verschiedenen Element $f_k(O)$ besteht. Hierdurch wird bei der Multiplikation aus der Matrix $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{R}$ die k-te Spalte herausgegriffen, deren Elemente R_{ik} bei der Multiplikation mit dem Zeilenvektor $\mathbf{e}$ summiert werden:

$$\overline{x} = -\sum_{i=1}^{n} R_{ik}. \tag{39}$$

Im Falle der Gültigkeit von Gleichung (38) ergibt sich die mittlere Reichweite einer Strahlung der Energiestufe n – mit $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$ als mittlere Weglänge zwischen zwei Wechselwirkungsakten –

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{40}$$

Unter der Näherungsannahme [14, 8], daß p als energieunabhängig angesehen werden kann, folgt für gleiche Werte von n aus Gleichung (40)

$$\overline{x} = \frac{n}{\mu} = n\lambda. \tag{41}$$

Die Größe n, die in [14] als Wechselwirkungsparameter (WW-Parameter) bezeichnet wurde, gibt die Anzahl der mit Energieverlust verbundenen sukzessiven Wechselwirkungsakte eines Teilchens auf seinem Transmissionswege an.

6.6 Transmission von divergierenden Strahlenbündeln

Alle bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf die geradlinige Durchstrahlung durch einen individuellen Strahl. Hieraus folgt, daß die Ergebnisse der Transmission des geradlinigen Strahlungsflusses auch für die Strahlungsflußdichte b eines parallelen Strahlenbündels gelten.

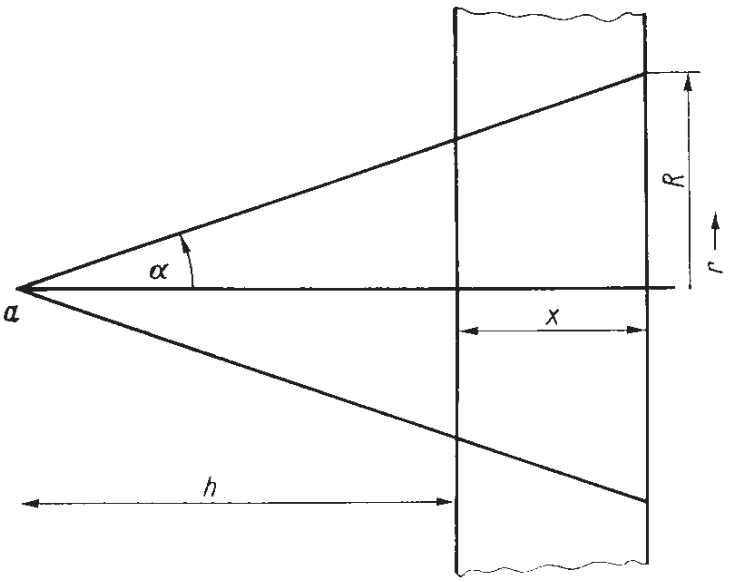

Abb. 1. Planparallele Schicht der Dicke x im Abstand h von einer punktförmigen Quelle

Im Falle einer punktförmigen Strahlungsquelle mit dem energetisch bezogenen Vektor der Aktivität $\mathbf{a} \widehat{=} a(E)$ ist der auf einer kreisförmigen Scheibe vom Radius R unmittelbar hinter einer im Abstand h von der Quelle befindlichen planparallelen Schicht der Dicke x (Abb. 1) auftreffende Strahlungsfluß in seiner energetischen Verteilung $\mathbf{f} \widehat{=} \varphi(E)$ gegeben durch die Beziehung (vgl. [18])

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r \mathbf{e}^{\mathbf{K} x u} \mathbf{a}}{(x+h)^2 u^3} \, \mathrm{d}r \tag{42}$$

mit

$$u = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{x+h}\right)^2}. \tag{43}$$

Die Substitution von Gleichung (43) liefert das Integral mit $u = U$ für $r = R$:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\int\limits_1^U \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{K}xu}\mathbf{a}}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[-\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{K}xu}}{u} + \mathbf{K}x\,\mathrm{Ei}(\mathbf{K}xu)\Big]_1^U \mathbf{a}. \tag{44}$$

Definiert durch man eine Matrix-Exponentialintegralfunktion durch

$$\mathrm{Ei}(\mathbf{K}x) = -\int\limits_x^\infty \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{K}\xi}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{45}$$

und eine Matrix-King-Funktion durch

$$\Psi(\mathbf{K}x) = \mathbf{e}^{\mathbf{K}x} - \mathbf{K}x\,\mathrm{Ei}(\mathbf{K}x), \tag{46}$$

so erhält man den Strahlungsfluß des divergierenden Bündels hinter der Schicht in seiner energetischen Verteilung durch die Beziehung

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\Big[\Psi(\mathbf{K}x) - \frac{1}{U}\Psi(\mathbf{K}Ux)\Big]\mathbf{a}. \tag{47}$$

6.7 Selbstabsorption

Zur Berechnung der Strahlung beim geradlinigen Austritt aus einer radioaktiven, selbstabsorbierenden, homogenen Schicht der spezifischen Aktivität $\mathbf{q}$ hat man die Strahlungsanteile aus allen Schichttiefen zu integrieren und erhält dann für die Strahlungsflußdichte $\mathbf{b} \widehat{=} b(E)$

$$\mathbf{b}(x) = \int\limits_0^x \mathbf{e}^{\mathbf{K}\xi}\mathbf{q}\,\mathrm{d}\xi = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{\mathbf{K}x})\mathbf{q}. \tag{48}$$

Der Sättigungswert für $x \to \infty$ ist durch

$$\mathbf{b}_s = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \tag{49}$$

gegeben, und wegen der Kommutativitätseigenschaft von $\mathbf{K}^{-1}$ und $\mathbf{e}^{\mathbf{K}x}$ gilt entsprechend Gleichung (22)

$$\mathbf{b}(x) = (\mathbf{1} - \mathbf{e}^{\mathbf{K}x})\mathbf{b}_s. \tag{50}$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man in der homogenen Transportgleichung Gleichung (9) einen additiven Quellenterm $\mathbf{q}$ hinzufügt und die inhomogene Matrizendifferentialgleichung durch Variation der Konstanten löst.

Berücksichtigt man bei der Berechnung der Strahlung einer planparallelen Schicht unendlicher Ausdehnung alle vorkommenden Strahlrichtungen, so gilt in entsprechender Weise wie im Abschnitt *6.6* für die Intensität der Strahlung zu beiden Seiten der Schicht die Beziehung

$$\mathbf{b}(x) = -\Big(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{\mathbf{K}x} - \mathbf{K}x\,\Psi(\mathbf{K}\mathrm{x})\Big)\frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}}{4}. \tag{51}$$

Hierin ist

$$\mathbf{b}_s = -\frac{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}}{4} \tag{52}$$

der Sättigungswert für $x \to \infty$. Andererseits gilt für die spezifische Aktivität

$$\mathbf{q} = -4\mathbf{K}\mathbf{b}_s. \tag{53}$$

Gleichung (53) erlaubt die Bestimmung der spezifischen Aktivität in ihrer energetischen Zusammensetzung an Schichten von Sättigungsdicke durch Messung der aus der Schicht heraustretenden Strahlung.

Wegen der eingangs behandelten Äquivalenz der Matrizen zu den Integraltransformationen kann Gleichung (53) auch in der Form

$$q(E) = -4\int\limits_0^\infty K(E,E')b_s(E')\,\mathrm{d}E' \tag{54}$$

geschrieben werden. Die Vorteile der Matrizenschreibweise zeigen sich besonders bei der analytischen Herleitung komplizierterer Beziehungen wie Gleichung (47) und Gleichung (51). Die Ergebnisse lassen sich dann unter Benutzung der Reversibilitätsbeziehung zwischen den Integraltransformationen und den Matrizentransformationen in einfacher Weise entsprechend dem Übergang von Gleichung (53) zu Gleichung (54) umformen.

7 Zur numerischen Lösung der Transportgleichung

Die auf der Diskretisierung beruhende numerische Lösung der Transportgleichung stellt eine Näherung dar. Zur Erzielung einer hohen Genauigkeit der Lösung sind lineare Differentialgleichungssysteme möglichst hoher Ordnung auszuwerten. Der hiermit verbundene Rechenaufwand kann in rationeller Weise nur noch mit modernen Hochleistungs-Rechenautomaten bewältigt werden (vgl. [19]).

Von den Verfassern wurden Rechenprogramme zur Lösung des d'Alembertschen Differentialgleichungssystems entwickelt, die auf der Reihenentwicklung der Matrix-Exponentialfunktion beruhen. Das Speichervermögen der Rechenmaschine (ODRA 1204) reicht für Matrizenordnungen bis 31 aus[4].

Für Diskussionen zu der Problematik der vorliegenden Arbeit danken die Verfasser Herrn Dr. H. Domke (Zentralinstitut für Astrophysik, Potsdam).

Herrn Prof. Dr. J. Picht in großer Verehrung zum 75. Geburtstag gewidmet.

Eingegangen am 15. 5. 1972

Literatur

[1] *B. Davison,* Neutron Transport Theory, Oxford 1958.

[2] *S. Chandrasekhar,* Radiative Transfer, New York 1960.

[4]Anmerkung bei der Textbearbeitung des vorliegenden Artikels im Jahre 2008:
Die Angabe der Leistungsfähigkeit des Rechners ODRA 1204 bezieht sich auf den damaligen Stand der Rechentechnik - also etwa von 1970. In der nachfolgenden Zeit nahm die Computertechnk einen enormen Aufschwung, welcher u. a. die Organisation der Datenverarbeitung, die Speicherkapazität, die Rechengeschwindigkeit und die graphische Darstellung betrifft. Somit entfällt die hier angegebene Begrenzung der Matrix auf den Rang 31. Allerdings gilt weiterhin, daß Auflösungsvermögen und Rechengeschwindigkeit in einem quadratischen Reziprozitätsverhältnis stehen.

[3] *K. M. Case, P. F. Zweifel,* Linear Transport Theory, Reading/Mass. 1967.

[4] *K. Inönü, P. F. Zweifel,* Developments in Transport Theory, London-New York 1967.

[5] *V. Kourganoff,* Basic Methods in Transfer Problems, New York 1963.

[6] *H.-D. Freund,* Atomkernenergie **15** (1970), S. 115.

[7] *K.-D. Leuthäuser,* Atomkernenergie **18** (1971), S. 11.

[8] *D. Harder,* Durchgang schneller Elektronen durch dicke Materieschichten, Habil.-Schrift Würzburg 1965.

[9] W. Heisenberg, Vorträge über kosmische Strahlung, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[10] *H. Melcher, K. Gerth,* Behandlung von Strahlungstransportproblemen mit Matrizenfunktionen, Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. Erfurt **8** (1972,) S. 3.

[11] *W. Schmeidler,* Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, 1: Lineare Integralgleichungen, 2. Aufl., Leipzig 1955.

[12] *S. O. Michlin,* Vorlesungen, über lineare Integralgleichungen, Berlin 1962.

[13] *P. Lenard,* Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1925.

[14] *H. Melcher,* Transmission und Absorption, Ein allgemeines Gesetz für ionisierende Strahlungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,Berlin 1970.

[15] *F. R. Gantmacher,* Matrizenrechnung, Teil 2: Spezielle Fragen und Anwendungen, Berlin 1959.

[16] *R. Bellman,* Introduction to Matrix Analysis, New York-Toronto-London. 1960.

[17] *O. W. Collins, A. D. Code,* Some Numerical Methods for the Solution of the Equation of Transfer, Astrophys. J. **142** (1965), S. 1576.

[18] *W. Gorschkow,* Gammastrahlung radioaktiver Körper, Leipzig 1960.

[19] *G. I. Marčuk, V. I. Lebedev,* Čislennye metody v teorii perenosa nejtronov (Numerische Methoden in der Neutronentransporttheorie), Moskau 1971.

Der vorliegende Artikel in dem wissenschaftlichen Journal ***Kernenergie*** wurde im Jahre 2008 mittels der modernen Computertechnik mit Schriftanalyse aufgenommen und textgetreu wiedergegeben. Die Textverarbeitung mit dem Setzprogramm LaTeX 2e erforderte die Anpassung der Symbole für Vektoren und Matrizen an die international gültige Schreibweise und einen Umbruch des Textes mit Veränderung der Paginierung bis auf die Anfangsseite.

Solution of the stationary radiation transport problem for energy scattering using matrix functions

Horst Melcher[1] and Ewald Gerth[2]

[1] *Pedagogic College ,,Dr.Theodor Neubauer", Erfurt-Mühlhausen, GDR*
[2] *Central Institute for Astrophysics of the Academy of Sciences of the GDR, Potsdam*

Abstract

The transport equation of Boltzmann is formulated and solved by means of an infinite equation of matrices for the case of the stationary rectilinear propagation of radiation with respect to energy scattering only. It is shown that the matrix formalism is the proper one to explain the qualities of transformations and the non-commutativity of the radiation transmitted through compound, heterogeneous layers of material. Furthermore, an analytical and perspicuous representation of the transmission of divergent beams is given. Finally, simple equations for the flux of radiation, the mean range, and the counting rate are set up.

Publication

Kernenergie, 1973, Vol. 16, No. 2, pp. 47-52, German

Article available in German by the web-address: `www.ewald-gerth.de/42.pdf`

Institution of the authors in 1972

Professor Dr. rer. nat. habil. Horst Melcher
Pedagogic College "Dr. Theodor Neubauer" Erfurt-Mühlhausen,
leader of the scientific area of Experimental Physics I
of the section Mathematics/Physics

Dr. sc. nat. Ewald Gerth
Central Institute of Astrophysics of the Academy of Sciences of the GDR,
Potsdam, East Germany