

Behandlung von Strahlungstransportproblemen mit Matrixfunktionen¹

Von Horst Melcher und Ewald Gerth

Eingegangen am 25. 11. 1970

Herrn Nationalpreisträger Prof. Dr. habil. C. F. Weiss,
Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
in Hochachtung und Dankbarkeit zur Vollendung seines 70. Lebensjahres gewidmet.

Einleitung

Die Vielfalt der physikalischen Transporterscheinungen - z.B. der Strömung, der Diffusion und der Strahlung - wird allgemein durch eine von BOLTZMANN aufgestellte Integrodifferentialgleichung umfaßt, deren Lösung eine analytische Beschreibung des betreffenden Problems liefert.

Die mathematische Behandlung dieser Integrodifferentialgleichung erweist sich als sehr schwierig; eine allgemeine Lösung ist bisher noch nicht gefunden worden. Lediglich für eine Reihe von Spezialfällen lassen sich Lösungen in geschlossener Form angeben.

Im Falle der Transmission von Strahlung durch Materie-Schichten kann die Integrodifferentialgleichung durch Spezialisierung stark vereinfacht werden, so daß eine dem speziellen Problem angemessene analytische Lösung angegeben werden kann.

In Weiterführung des von MELCHER [1] für verschiedene Strahlenarten aufgefundenen einheitlichen Transmissionsgesetzes wird in der vorliegenden Arbeit eine Formulierung des Transmissionsgesetzes mit Hilfe von Matrixfunktionen vorgenommen. Dabei zeigt es sich, daß das in [1] angegebene Transmissionsgesetz eine spezielle Lösung der BOLTZMANNschen Integrodifferentialgleichung des Strahlungstransportes ist, wobei der Kern dieser Gleichung durch eine Matrixfunktion dargestellt werden kann.

1 Die Aufstellung der Integrodifferentialgleichung für Strahlungstransportvorgänge

Die Transportvorgänge werden durch die funktionale Abhängigkeit des Strahlungsflusses φ von dem Positionsvektor \mathbf{r} , der Teilchengeschwindigkeit \mathbf{v} und der Zeit t

$$d\varphi = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1)$$

beschrieben.

Das totale Differential von (1) ergibt

¹Abstract: www.ewald-gerth.de/39abs.pdf – attached at the end of this article (page 21).

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{v}} d\mathbf{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt, \quad (2)$$

bzw. nach Einführung eines Ortsgradienten und eines Geschwindigkeitsgradienten –

$$d\varphi = \text{grad}_r \varphi d\mathbf{r} + \text{grad}_v \varphi d\mathbf{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt. \quad (3)$$

Daraus folgt für die totale zeitliche Änderung des Strahlungsflusses

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{v} \text{grad}_r \varphi + \mathbf{a} \text{grad}_v \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (4)$$

Hierin ist $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ die Beschleunigung, die sich auf Grund der Einwirkung einer äußeren Kraft ergeben kann.

Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} kann nach Betrag v und Richtung (Normalenvektor \mathbf{n}) getrennt werden. Das ist erforderlich, um weiter unten die skalare Größe Energie E einzuführen,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} v .$$

Damit schreibt man an Stelle von (1)

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}v, t). \quad (1a)$$

Nunmehr soll die Bilanz des Strahlungsflusses im Zeitelement dt bestimmt werden, in dem die gestreuten Teilchen den Weg dr' zurücklegen. (Die Größen der gestreuten Teilchen werden durch einen Strich gekennzeichnet.) Die Menge der Teilchen eines vorgegebenen Geschwindigkeitsbereiches $d\mathbf{v}$ erfährt längs des Weges dr' Änderungen infolge von Streu- und Absorptionsprozessen. In das betrachtete Geschwindigkeitsintervall können aus anderen Geschwindigkeitsbereichen einerseits Teilchen hineingestreut, andererseits aber auch aus diesem Intervall herausgestreut werden. Der differentielle Strahlungsfluß der hineingestreuten Teilchen wird mit $(d\varphi)_{in}$ und der herausgestreuten Teilchen mit $(d\varphi)_{ex}$ bezeichnet. Schließlich sind noch Quellen im Streugebiet zu berücksichtigen, von denen der differentielle Strahlungsfluß $(d\varphi)_{Qu}$ ausgeht.

Aus der Bilanz der drei Anteile der zeitlichen Änderung des Strahlungsflusses, dargestellt durch die Summe

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{ex} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{in} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{Qu}, \quad (5)$$

ergibt sich die BOLTZMANNsche Integrodifferentialgleichung des Strahlungstransportes, indem man für die einzelnen Anteile die folgenden Beziehungen einsetzt:

1. Herausstreuung:

$$(d\varphi)_{ex} = -S_t(v') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t) dr' \quad (6)$$

$S_t(v')$ ist der totale Streukoeffizient der Winkel- und Energiestreuung.

2. Hineinstreuung:

$$(d\varphi)_{in} = + \int_0^\infty \int_{4\pi} S(v) g(\mathbf{n}'v', \mathbf{n}v) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}v, t) d\mathbf{n} d\mathbf{v} dr' \quad (7)$$

$S(v)$ ist der Koeffizient der Hineinstreuung und $g(\mathbf{n}'v', \mathbf{n}v)$ eine Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion für die Streuprozesse.

3. Zusätzliche Quellen im Feld:

$$(d\varphi)_{Qu} = +Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t) dr' \quad (8)$$

Damit lautet die BOLTZMANNsche Integrodifferentialgleichung in geschlossener Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'\text{grad}_r\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t) + \frac{\mathbf{a}}{v'}\mathbf{n}'\text{grad}_r\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t) + \frac{1}{v'}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t)}{\partial t} = \\ = -S_t(v') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t) + \int_0^\infty \int_{4\pi} S(v) g(\mathbf{n}'v', \mathbf{nv}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{nv}, t) d\mathbf{n} dv + Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t). \end{aligned} \quad (9)$$

2 Spezialisierung der Transportgleichung für das Problem der Transmission von Kernstrahlung durch Materieschichten

Den folgenden theoretischen Betrachtungen liegt eine spezielle (fiktive) Meßanordnung zugrunde: Die Transmission von Strahlungen durch Materieschichten wird in der (meistens üblichen) Anordnung gemessen, in der ein paralleles Strahlenbündel einer außerhalb der Schicht befindlichen Quelle die Schicht durchsetzt und in einen Detektor eintritt, der sich ebenfalls außerhalb der betrachteten Schicht befindet.

Für dieses Problem der Transmissionsmessung - z.B. bei Kernstrahlungen - werden nun einige einschneidende Vereinfachungen der allgemeinen Gleichung (9) vorgenommen:

1. Auf den Strahlungsfluß sollen keine äußeren Kräfte einwirken, d.h., es gilt $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, und damit verschwindet das zweite Glied in Gl. (9).
2. Der Vorgang wird als ein stationärer Prozeß betrachtet, d.h., es liegt keine Zeitabhängigkeit der Quellstärke vor: Mit $\partial\varphi/\partial t = 0$ verschwindet das dritte Glied in Gl. (9).
3. Es sollen im streuenden Bereich keine Quellen vorhanden sein. Mit $Q(\mathbf{r}, \mathbf{n}'v', t) = 0$ verschwindet auch das letzte Glied in Gl. (9). Die Quelle des konstanten Strahlungsflusses befindet sich außerhalb der streuenden Schicht.
4. Die Winkelstreuung soll unberücksichtigt bleiben; die Transmission wird also nur in einer Richtung betrachtet, so daß man den Ortsgradienten (erstes Glied) als Differentialquotienten der Wegkoordinate x schreiben kann.

Damit erhält man nun als Transportgleichung für einen kräfte- und quellenfreien, homogenen, stationären Strahlungsfluß der Energie E - statt der in Gl. (3) angegebenen Geschwindigkeit

$$\frac{\partial\varphi(E', x)}{\partial x} = -\varphi(E', x) \int_0^{E'} N\sigma^*(E, E') dE + \int_{E'}^\infty N\sigma^*(E, E') \varphi(E, x) dE. \quad (10)$$

Hierin bedeuten σ den atomaren Wirkungsquerschnitt, σ^* den auf das Energieintervall dE bezogenen (differenziellen) Wirkungsquerschnitt

$$\sigma^*(E_1, E) = \frac{d\sigma(E', E)}{dE}, \quad (11)$$

$\varphi(E)$ die energetische Verteilungsfunktion des Strahlungsflusses Φ

$$\varphi(E) = \frac{d\Phi(E)}{dE} \quad (11a)$$

und N die Anzahl der Atome in der Volumeneinheit der Streusubstanz.

Für den Gesamtwirkungsquerschnitt σ_g und den Gesamtstrahlungsfluß Φ_g gelten die Beziehungen

$$\sigma_g(E) = \int_0^{\infty} \sigma^*(E', E) dE' \quad (11b)$$

und

$$\Phi_g = \int_0^{\infty} \varphi(E) dE. \quad (11c)$$

Bei dem betrachteten physikalischen Problem treten nur solche Energieänderungen auf, die von höheren zu niedrigeren Energien führen; das bedeutet, daß bei einem Streuakt das Teilchen nur Energie verlieren, niemals aber gewinnen kann. Somit ist die Richtung der Energieänderung festgelegt: $E \rightarrow E'$. Demzufolge ist $\sigma^*(E', E) = 0$ für $E \leq E'$.

Gl. (10) ist in der vorliegenden Gestalt für eine Lösung schwer zugänglich. Durch eine charakteristische Eigenschaft der Funktion $\sigma^*(E', E)$, die aus dem physikalischen Sachverhalt folgt, läßt sich Gl. (10) derart umformen, daß sie als Integraltransformation dargestellt werden kann. In dem quadratischen Definitionsbereich von $\sigma^*(E', E)$ ist die Funktion identisch Null unterhalb der durch die Gleichung $E' = E$ gegebenen Diagonale. Mit Hilfe der DIRACschen Delta-Funktion $\delta(E', E)$ für zwei unabhängige Variable können die beiden Summanden in Gl. (10) zusammengefaßt werden. Des weiteren wird die Integrationsvariable E'' eingeführt, um zu kennzeichnen, daß dieses Integral über die Wirkungsquerschnitte die Herausstreuung aus dem infinitesimalen Energieintervall dE' zu den niedrigeren Energiewerten E'' darstellt. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi(E', x)}{\partial x} = \int_0^{\infty} \left[-\delta(E', E) \int_0^{E'} N \sigma^*(E'', E') dE'' + N \sigma^*(E', E) \right] \varphi(E, x) dE'. \quad (12)$$

Hierin stellt

$$-\delta(E', E) \int_0^{E'} N \sigma^*(E'', E') dE'' + N \sigma^*(E', E) = K(E', E) \quad (13)$$

den Kern der Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(E', x) = \int_0^{\infty} K(E', E) \varphi(E, x) dE \quad (14)$$

dar. Durch Integration erhält man mit der Anfangsverteilung des Strahlungsflusses $\varphi(E, 0)$ die äquivalente Integralgleichung

$$\varphi(E', x) = \varphi(E', 0) + \int_0^x \int_0^{\infty} K(E', E) \varphi(E, \xi) dE d\xi. \quad (15)$$

Gl. (15) ist eine zweidimensionale, lineare, inhomogene Integralgleichung zweiter Art [2] mit der Vorgabe des festen Parameterwertes $\lambda = 1$. Bezüglich der Variablen x ist die Integralgleichung vom VOLTERRASchen Typ und bezüglich der Variablen E vom FREDHOLMSchen Typ.

Der Kern ist im allgemeinen Fall - z.B. bei inhomogenen Schichten - eine Funktion von x . Hier soll aber zunächst nur der Fall der homogenen Schicht betrachtet werden, wobei die Kernfunktion bezüglich der Schichtdicke konstant ist. Die Lösung von Gl. (15) kann mit Hilfe der Resolvente $T(E', E, x', x, \lambda)$ für eine zweidimensionale Integralgleichung angegeben werden, die gleichzeitig die Bedeutung einer GREENSchen Einflußfunktion hat. Da in der Integralgleichung (15) $x' = x$ und $\lambda = 1$ ist, reduziert sich das Argument auf die drei unabhängigen Variablen E', E und x . Die Funktion $T(E', E, x)$ wird im folgenden als „Transformationsfunktion“ bezeichnet, da sich hiermit die Lösung in Form einer Integraltransformation darstellen läßt:

$$\varphi(E', x) = \int_0^{\infty} T(E', E, x) \varphi(E, 0) dE. \quad (16)$$

Durch die Transformation wird folgender physikalischer Sachverhalt analytisch zum Ausdruck gebracht: Vor dem Eintritt in die Schicht liegt eine bestimmte Energieverteilung des Strahlungsflusses vor, die als Folge der Streuwirkung in eine andere Verteilung umgesetzt - d.h. transformiert - wird.

Die Resolvente $T(E', E, x)$ befriedigt auch die Integrodifferentialgleichung (14) und stellt somit eine partikuläre Lösung dieser Gleichung dar.

3 Die Strahlungstransmission durch zusammengesetzte Medien (Mehrfachschichten)

Es soll nun der Fall untersucht werden, daß die Strahlung mehrere Schichten durchsetzt, die sich in ihren Streueigenschaften unterscheiden. Die einzelnen Schichten verschiedenen Materials können durch die Angabe der Ordnungszahl Z , der relativen Atommasse A und der Dichte Q gekennzeichnet werden. Der Schwächungs- oder Wechselwirkungskoeffizient $\mu = N\sigma$ hängt außer von der Energie der betreffenden Strahlung und Strahlungsart von diesen drei Materialgrößen ab.

Zunächst wird die Transmission der Strahlung durch zwei verschiedene Schichten unterschiedlicher Streueigenschaften betrachtet. Durch Induktionsschluß folgt daraus die allgemeine Beziehung für n Schichten.

Für die Transmission der Strahlung durch die erste Schicht gilt

$$\varphi(E', x_1) = \int_0^{\infty} T_1(E', E, x_1) \varphi(E, 0) dE. \quad (17)$$

Die Austrittsenergie E' der ersten Schicht ist zugleich die Anfangsenergie der zweiten Schicht. Somit gilt für die energetische Verteilung des Strahlungsflusses nach Durchdringen der zweiten Schicht

$$\varphi(E'', x_2) = \int_0^{\infty} T_2(E'', E', x_2) \varphi(E', x_1) dE'. \quad (18)$$

Substituiert man 01. (17) in (18), so folgt für die Transmission durch beide Schichten

$$\varphi(E'', x_1 + x_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T_2(E'', E', x_2) T_1(E', E, x_1) \varphi(E, 0) dE dE',$$

also

$$\varphi(E'', x_1 + x_2) = \int_0^{\infty} T_{1+2}(E'', E, x_1 + x_2) \varphi(E, 0) dE, \quad (19)$$

wobei

$$T_{1+2}(E'', E, x_1 + x_2) = \int_0^{\infty} T_2(E'', E', x_2) T_1(E', E, x_1) dE' \quad (20)$$

ist.

Die Transformationsfunktionen T_1 und T_2 sind im allgemeinen verschieden.

Die Umkehrung der Reihenfolge beider Schichten führt an Stelle von Gl. (20) zu der resultierenden Transformationsfunktion

$$T_{2+1}(E'', E, x_1 + x_2) = \int_0^{\infty} T_1(E'', E', x_1) T_2(E', E, x_2) dE' \quad (21)$$

Der Übergang der Energien von E nach E' und E'' erfolgt wiederum im Sinne einer Verminderung (Dissipation), so daß ebenso wie bei Gl. (20) $E > E' > E''$ ist. Die einzelnen Transformationsfunktionen sind aber miteinander vertauscht.

Durch Vergleich von Gl. (21) mit Gl. (20) wird ersichtlich, daß jeweils über andere Funktionswerte der Transformationsfunktionen T_1 und T_2 integriert wird. Daraus folgt, daß die Integrationsreihenfolge nicht ohne weiteres vertauschbar ist; d.h., die Vertauschung führt im allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Das bedeutet, daß der **Transmissionsprozeß** durch Mehrfachschichten im allgemeinen **nicht kommutativ** ist.

Die **Nichtkommutativität** ist ein hervorstechendes Merkmal der **Matrizenmultiplikation**. Auch die vorstehenden Integralrelationen lassen sich in analoger Weise wie Verknüpfungen von Matrizen auffassen.

4 Die Strahlungstransmission in Matrizendarstellung

Eine Integralgleichung kann nach SCHMEIDLER als ein unendliches System linearer Gleichungen dargestellt werden [2, S. 120 ff.]. Die Analogie zu den linearen Gleichungen war bereits der leitende Gedanke, der FREDHOLM zu seiner Theorie der Integralgleichungen führte [2, S. 3]. Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems ist dann gleichbedeutend mit der Kernfunktion; sie kann daher auch als Kernmatrix bezeichnet werden. Der Vektor der unabhängigen Variablen entspricht der gesuchten Funktion der Integralgleichung. Die Integralgleichungen lassen sich somit durch unendliche Matrizen und Vektoren darstellen, die den gesamten Funktionsbereich kontinuierlich mit ihren Elementen ausfüllen.

Die konsequente Anwendung des Matrizenformalismus führt bei Integralgleichungen zu einer wesentlichen Vereinfachung der Symbolik: Die Integrationen werden durch Matrizenoperationen ersetzt. Damit ist eine eindeutige Umkehrbarkeit beider Schreibweisen gegeben: Man kann von den Matrizenoperationen ohne weiteres wieder zu den Integraloperationen übergehen. Durch die Matrizendarstellung werden aber neben der Vereinfachung der Symbolik, der besseren Übersichtlichkeit der Schreibweise, vor allem Vorteile in der Methodik der analytischen Behandlung von Integralgleichungen [2] erzielt, wie aus den folgenden Darlegungen ersichtlich sein wird.

Um zur Matrizendarstellung der Strahlungstransmission zu gelangen, wird die energetische Strahlungsflußverteilung $\varphi(E)$ durch einen Vektor \mathbf{f} ersetzt, dessen unendlich viele Koordinaten den Energiewerten zugeordnet sind: $\mathbf{f} \triangleq \varphi(E)$. Die in der Integrodifferentialgleichung (14) bzw. der Integralgleichung (15) enthaltene Kernfunktion $\mathbf{K}(E', E)$ wird durch eine quadratische Matrix \mathbf{K} mit unendlich vielen Elementen, die Kernmatrix, ersetzt: $\mathbf{K} \triangleq \mathbf{K}(E', E)$. Diese Matrix braucht nur für den betrachteten quadratischen Definitionsbereich bekannt zu sein.

Damit kann man nun die Integrodifferentialgleichung (14) als Matrixgleichung schreiben:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{f}(x) = \mathbf{K} \mathbf{f}(x). \quad (22)$$

In dieser Schreibweise braucht nur noch die Abhängigkeit von der Ortsvariablen x gekennzeichnet zu werden. Die Energieabhängigkeit ist bereits durch die Matrixstruktur festgelegt. Die zu Gl. (22) gehörende äquivalente Integralgleichung lautet – im Gegensatz zu Gl. (15) –

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(0) + \int_0^x \mathbf{K} \mathbf{f}(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Diese Integralgleichung läßt sich durch Iteration auf einfache Weise lösen, indem man die NEUMANNsche Reihe entwickelt.

Für den Anfangsvektor $\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{f}(0)$ ergibt der erste Iterationsschritt unter Benutzung der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$

$$\mathbf{f}(x_1) = \mathbf{f}(x_0) + \mathbf{K} x \mathbf{f}(0) = (\mathbf{1} + \mathbf{K} x) \mathbf{f}(0) \quad (24)$$

und der zweite Iterationsschritt

$$\mathbf{f}(x_2) = \mathbf{f}(0) + \int_0^x \mathbf{K} (\mathbf{1} + \mathbf{K} \xi) \mathbf{f}(0) d\xi = \left(\mathbf{1} + \mathbf{K} x + \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 x^2 \right) \mathbf{f}(0). \quad (25)$$

Durch wiederholtes Substituieren erhält man schließlich die NEUMANNsche Reihe zu Gl. (23)

$$\mathbf{f}(x) = \left(\mathbf{1} + \mathbf{K} x + \frac{1}{2!} \mathbf{K}^2 x^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{K}^3 x^3 + \dots \right) \mathbf{f}(0). \quad (26)$$

Mit dem in der Klammer stehenden Ausdruck

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{1} + \mathbf{K} x + \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 x^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{K}^3 x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{K}^k x^k, \quad (27)$$

der mit der Definition von $\mathbf{K}^0 = \mathbf{1}$ zu einer Summe analog der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion zusammengefaßt werden kann, läßt sich die Lösung nach Gl. (26) als Vektor-Transformationsgleichung schreiben, bei der die Transformation durch die quadratische Matrix $\mathbf{T}(x)$ bewirkt wird,

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{T}(x) \mathbf{f}(0). \quad (28)$$

Gl. (28) ist Gl. (16) äquivalent. Die Transformationsmatrix (Resolventenmatrix) $\mathbf{T}(x)$ ist eine partikuläre Lösung von Gl. (22). Diese Matrix wird auf Grund der formalen Übereinstimmung mit einer Exponentialfunktion in Reihendarstellung nach Gl. (27) als „Matrix-Exponentialfunktion“ bezeichnet und in der Form

$$\mathbf{T}(x) = e^{\mathbf{K} x}. \quad (29)$$

geschrieben [3, S. 165].

Die der Gl. (16) entsprechende Lösung der BOLTZMANNschen Integrodifferentialgleichung für den speziellen Fall des kräfte- und quellenfreien, homogenen, stationären Strahlungsfeldes lautet somit

$$\mathbf{f}(x) = e^{\mathbf{K}x} \mathbf{f}(0). \quad (30)$$

Diese Gleichung entspricht formal dem LENARDSchen Transmissionsgesetz

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

worin I die Intensität der Strahlung und μ der Schwächungskoeffizient sind; sie ist jedoch von allgemeinerer Bedeutung. Geht man zum skalaren Fall über, wobei der Vektor \mathbf{f} nur aus einem Element bestehen, d.h. nur eine einzige Energiekomponente enthalten soll, die von einem geeigneten Detektor nur für eben diesen Energiewert nachweisbar ist, so findet man als Spezialfall der Gl. (30)

$$f(x) = e^{-\mu x} f(0). \quad (31)$$

Hierin stellt $e^{-\mu x}$ einen Wahrscheinlichkeitsfaktor dar, den man am besten vor die Funktion $f(0)$ setzt, was dann der Definition der zugehörigen Matrizenverknüpfung entsprechen würde.

5 Die Diskretisierung der Strahlungstransportgleichung

Von praktischer Bedeutung für die Berechnung der Strahlungstransmission ist selbstverständlich nicht eine unendliche Matrix oder ein Vektor mit unendlich vielen Komponenten. Um zu konkreten Werten übergehen zu können, muß man die Ordnung der Matrix und die Anzahl der Komponenten des Vektors auf eine endliche Größe beschränken. Hierbei wird für einen gegebenen Energiebereich eine Diskretisierung der energetischen Verteilung des Strahlungsflusses sowie der Kernfunktion vorgenommen, indem bestimmte Energieintervalle, in denen das Integral der Funktionswerte gebildet wird, zusammengefaßt werden.

So ergibt die Integration der Gl. (10) über das Energieintervall $\Delta E_i = E_i - E_{i-1}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{E_{i-1}}^{E_i} \varphi(E', x) dE' \right) = \\ & = - \int_{E_{i-1}}^{E_i} \varphi(E', x) \int_{E_0}^{E'} N \sigma^*(E', E) \varphi(E, x) dE dE' + \int_{E_{i-1}}^{E_i} \int_{E'}^{\infty} N \sigma^*(E', E) \varphi(E, x) dE dE'. \end{aligned} \quad (32)$$

Der Strahlungsfluß für das Energieintervall ΔE_i ist

$$\int_{E_{i-1}}^{E_i} \varphi(E') dE' = \Delta \Phi_i. \quad (33)$$

Nach dem Mittelwertssatz der Integralrechnung kann man somit die energetische Strahlungsflußverteilung dieses Intervalls durch den mittleren Wert

$$\bar{\varphi}(E')_i = \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta E_i} \quad (34)$$

ersetzen. Eine entsprechende Beziehung gilt dann auch für den von E abhängigen Strahlungsfluß; hierfür wird der Index k verwendet. Unter der Annahme, daß im Intervall ΔE_i näherungsweise $\bar{\varphi}_i = \text{const}$ gesetzt werden darf, kann man Gl. (32) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \Phi_i(x)) = \\
& = -\Delta \Phi_i(x) \frac{1}{\Delta E_i} \int_{E_{i-1}}^{E_i} \int_{E_0}^{E_i} N \sigma^*(E, E') \, dE \, dE' + \\
& + \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\Delta \Phi_k(x)}{\Delta E_i} \cdot \int_{E_{i-1}}^{E_i} \int_{E_{k-1}}^{E_k} N \sigma^*(E', E) \, dE \, dE'. \tag{35}
\end{aligned}$$

Führt man nun für die in Gl. (35) enthaltenen Integrale die Abkürzungen

$$\mu_{ik} = \frac{1}{\Delta E_i} \int_{E_{i-1}}^{E_i} \int_{E_0}^{E_i} N \sigma^*(E, E') \, dE \, dE' \quad \text{für} \quad i = k \tag{36}$$

$$\mu_{ik} = \frac{1}{\Delta E_k} \int_{E_{i-1}}^{E_i} \int_{E_{k-1}}^{E_k} N \sigma^*(E', E) \, dE \, dE' \quad \text{für} \quad i < k \tag{37}$$

und

$$\mu_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i > k$$

ein, so ergibt sich die i -te Gleichung eines D'ALEMBERTschen Differentialgleichungssystems unendlicher Ordnung,

$$\frac{d}{dx} (\Delta \Phi_i(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ik} \Delta \Phi_k(x), \tag{38}$$

das nach Ersetzen von $\Delta \Phi_i$ durch f_i in der Matrizenform gemäß Gl. (22) geschrieben werden kann.

Bei einer numerischen Auswertung ist es nicht erforderlich, unendliche Energiebereiche zu betrachten, da die in der Praxis zur Verfügung stehenden Energien stets endlich sind. Demzufolge bestehen die Vektoren der diskretisierten Strahlungsflußverteilung aus einer endlichen Anzahl von Elementen. Die Angabe von Kernmatrizen und Transformationsmatrizen von höherer Ordnung als der Komponentenzahl des zu transformierenden Vektors bedeutet eine unnötige Belastung des Rechenapparates, zumal die Strahlung infolge der Energiedissipation keine Streuung zu höheren Energiestufen erfährt. Für einen Strahlungsflußverteilungsvektor mit der durch n indizierten höchsten Energiestufe genügt somit ein D'ALEMBERTsches Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{d}{dx} f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{ik} f_k(x). \tag{39}$$

Das Schema der Koeffizienten μ_{ik} bildet die diskretisierte Kernfunktion der Integrodifferentialgleichung (14). Die Koeffizientenmatrix kann deshalb auch in diesem Falle als Kernmatrix bezeichnet werden.

Die Größen μ_{ik} haben die physikalische Bedeutung von Schwächungskoeffizienten. Im speziellen Fall des LENARDSchen Transmissionsgesetzes nach Gl. (31) besteht die Kernmatrix aus nur einem Element μ .

6 Die analytische Lösung des D'Alembertschen Systems

Für die Lösung des durch die Diskretisierung erhaltenen endlichen Differentialgleichungssystems sind eine Anzahl von Methoden bekannt. Als ungeeignet für eine auf der analytischen Lösung aufbauende numerische Behandlung des Differentialgleichungssystems sind solche Methoden anzusehen, bei denen die unbestimmten Integrationskonstanten erst aus den Anfangsbedingungen ermittelt werden müssen. Die hier angeführte Reihenentwicklung der Matrix-Exponentialfunktion gestattet eine unmittelbare Lösung des Anfangswertproblems. Es sei darauf hingewiesen, daß dies auch bei dem Lösungsverfahren mit Hilfe der LAPLACE-Transformation möglich ist. Als ein günstiger Umstand erweist es sich im Falle der Strahlungstransmission, daß alle auftretenden Matrizen Dreiecksmatrizen sind, so daß sich das Eigenwertspektrum unmittelbar aus den Hauptdiagonalelementen der Kernmatrix entnehmen läßt. Ein Vorzug dieses Lösungsverfahrens besteht darin, daß man für alle Elemente der Transformationsmatrix analytische Ausdrücke angeben kann. Die LAPLACE-Transformierte der Matrix-Exponentialfunktion Gl. (29) – durch eine Tilde gekennzeichnet – folgt aus der Beziehung

$$\tilde{\mathbf{T}}(s) = \int_0^{\infty} e^{-1sx} e^{\mathbf{K}x} = (\mathbf{1}s - \mathbf{K})^{-1} \quad (40)$$

mit der unabhängigen komplexen Variablen s im Bildraum der Transformation. Nach der Inversion der charakteristischen Matrix $\mathbf{1}s - \mathbf{K}$ können mit den bei DOETSCH [3] angegebenen Korrespondenzbeziehungen alle Matrixelemente einzeln aus dem Bildraum in den Originalraum der LAPLACE-Transformation zurücktransformiert werden.

7 Einige Folgerungen aus der Matrizendarstellung der Lösung der Transportgleichung

7.1 Der Transformationscharakter der Streuung

Aus der Form der Lösung nach Gl. (28) und (29) ist der Transformationscharakter der mit Energiestreuung verbundenen Transmission von Strahlung durch Materieschichten unmittelbar zu entnehmen².

Die Transformation kann von beliebigen Anfangsverteilungen ausgehen. Dies ist insbesondere für die Untersuchung der Spektren der Beta-Strahlung von großer praktischer Bedeutung, da diese von vornherein eine breit aufgefächerte energetische Verteilung aufweisen.

Darüber hinaus ist es möglich, mit der Kenntnis einer aus der Transformation resultierenden Endverteilung auf die Ausgangsverteilung rückzuschließen. Zu diesem Zweck wird Gl. (28) invertiert,

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{T}(x)^{-1} \mathbf{f}(x). \quad (41)$$

Die inverse Transformationsmatrix $\mathbf{T}(x)^{-1}$ ergibt sich bei einer Matrix-Exponentialfunktion auf äußerst einfache Weise durch Vorzeichenumkehr der unabhängigen Variablen x ,

$$\mathbf{T}(x)^{-1} = (e^{\mathbf{K}x})^{-1} = e^{-\mathbf{K}x} = \mathbf{T}(-x). \quad (42)$$

Mehrfachtransformationen ergeben sich auf Grund der multiplikativen Verknüpfung der Transformationsgleichung (28) durch Produktbildung der Transformationsmatrizen.

²Analoge, aber weitaus kompliziertere Transformationsbeziehungen gelten auch für die Winkelstreuung, die in der vorliegenden Arbeit (s. 7.8.) unberücksichtigt bleibt.

7.2 Die Nichtkommutativität der Transmission bei heterogenen Mehrschichten

Die Nichtkommutativität der Strahlungstransmission durch Mehrschichten verschiedenen Materials kann mit Hilfe von Matrizen besonders einfach dargestellt werden.

Für die Transmission der Strahlung durch die erste Schicht gilt die Transformationsbeziehung

$$\mathbf{f}(x_1) = \mathbf{T}_1(x_1)\mathbf{f}(0). \quad (43)$$

Die energetische Verteilung der Strahlung nach der ersten Schicht ist zugleich die Ausgangsverteilung für die sich anschließende zweite Schicht, deren Transmissionswirkung dann durch

$$\mathbf{f}(x_2) = \mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{f}(x_1) \quad (44)$$

beschrieben wird.

Die Transformation der beiden miteinander kombinierten Schichten ist gleichbedeutend mit einer zweifachen Transformation mit Hilfe der quadratischen Matrizen $\mathbf{T}_1(x_1)$ und $\mathbf{T}_2(x_2)$:

$$\mathbf{f}(x_1 + x_2) = \mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{T}_1(x_1)\mathbf{f}(0). \quad (45)$$

Hierbei ist besonders auf die Reihenfolge der Transformationen zu achten.

Bei der Transmission der Strahlung durch heterogene Schichten müssen die Transformationsmatrizen der einzelnen Schichten unterschieden werden,

$$\mathbf{T}_{1,2}(x_1 + x_2) = \mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{T}_1(x_1). \quad (46)$$

Keht man die Reihenfolge der Schichten um, so folgt

$$\mathbf{T}_{2,1}(x_2 + x_1) = \mathbf{T}_1(x_1)\mathbf{T}_2(x_2). \quad (47)$$

In der Vertauschungsrelation

$$\mathbf{T}_2(x_2)\mathbf{T}_1(x_1) - \mathbf{T}_1(x_1)\mathbf{T}_2(x_2) = \mathbf{D} \quad (48)$$

ist die Differenzmatrix bei nichtkommutativen Transformationsmatrizen $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$, bei kommutativen Matrizen dagegen gleich der Nullmatrix: $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Kommutativ sind in jedem Falle Transformationsmatrizen für gleiches Schichtmaterial.

Voraussetzung für die Kommutativität der Transformationsmatrizen ist die Kommutativität der Kernmatrizen.

7.3 Die Berechnung der Zählrate

Bei der konsequenten Anwendung des Matrizenformalismus auf die Strahlungstransmission läßt sich auch ein Ausdruck für die Berechnung der Zählrate angeben, die im allgemeinen kleiner (oder höchstens gleich) dem die Projektionsfläche des Detektors durchsetzenden Strahlungsfluß ist. Zu den Korrekturen der mit einem Strahlungsdetektor gemessenen Werte des Strahlungsflusses, die in Form einer äquivalenten Zählrate vorliegen, gehört auch die energieabhängige Nachweisempfindlichkeit des Detektors, worauf schon in [1] hingewiesen wurde.

Die Nachweisempfindlichkeit wird in der Matrizen Schreibweise durch einen Zeilenvektor \mathbf{w} ausgedrückt, dessen Elemente für das jeweilige Energieintervall die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, daß das betrachtete Strahlungskorpuskel durch den Detektor nachgewiesen wird.

Man erhält dann die Zählrate z als das Skalarprodukt des Zeilenvektors \mathbf{w} mit dem Spaltenvektor \mathbf{f} der energetischen Verteilung des Strahlungsflusses,

$$z = \mathbf{w}\mathbf{f}. \quad (49)$$

Auf diese Weise werden nur die Korpuskeln gezählt, die entsprechend der (energieabhängigen) Nachweisempfindlichkeit tatsächlich nachgewiesen werden können.

Nach der Transmission der Strahlung durch eine Schicht ist die Zählrate dadurch gegeben, daß der Vektor \mathbf{f} durch den transformierten Vektor $\mathbf{T}(x)\mathbf{f}(0)$ ersetzt wird:

$$z(x) = \mathbf{w}\mathbf{T}(x)\mathbf{f}(0). \quad (50)$$

Gl. (50) ist eine allgemeine analytische Beziehung für die Zählrate z als Funktion der Schichtdicke x . Nach bisher bekannten Darstellungen [1,5] ist $z(x)$ eine kompliziert aufgebaute Funktion, die mit guter Näherung durch die (komplementäre) unvollständige Gamma-Funktion I^* beschrieben werden kann.

7.4 Die Darstellung des transmittierten Strahlungsflusses

Um den gesamten Strahlungsfluß zu erfassen, hat man alle seine Bestandteile zu summieren. Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man an Stelle des Zeilenvektors der Nachweisempfindlichkeit den Einer-Vektor \mathbf{e} einführt, durch den für jeden Energiewert die Nachweiswahrscheinlichkeit Eins wird, so daß grundsätzlich alle auf die Querschnittsfläche des Detektors treffenden Teilchen gezählt werden. Mit $\mathbf{w} = \mathbf{e}$ gilt

$$\Phi = \mathbf{e}\mathbf{f}, \quad (51)$$

und für den durch eine Schicht der Dicke x transmittierten Strahlungsfluß erhält man

$$\Phi(x) = \mathbf{e}\mathbf{T}(x)\mathbf{f}. \quad (52)$$

7.5 Die Bestandteile des Zeilenvektors der Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein idealer Detektor besitzt die Nachweiswahrscheinlichkeit 1 für alle Energiewerte, so daß $\mathbf{w} = \mathbf{e}$ ist; ein realer Detektor weist dagegen eine energieabhängige Nachweiswahrscheinlichkeit auf, die zum Teil durch die physikalischen Eigenschaften des empfindlichen Volumens, zum Teil aber auch durch die energieabhängige Absorption des Materials der Detektoreinbettung (Gehäuse, Eintrittsfenster usw.) erklärt werden kann. Nur der letztere Anteil soll hier erörtert werden. Eine mit dem Detektor fest verbundene Materieschicht verändert durch ihre Transmissionseigenschaft die Nachweiswahrscheinlichkeit des Detektors. Selbst ein idealer Detektor würde durch eine solche zusätzliche Schicht mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_D eine energieabhängige Nachweis-Wahrscheinlichkeit erhalten, die durch den Zeilenvektor

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}\mathbf{T}_D. \quad (53)$$

dargestellt werden kann. Der resultierende Zeilenvektor ergibt sich durch rechtsseitige Multiplikation mit der Transformationsmatrix.

7.6 Definition einer mittleren Reichweite

Im Gegensatz zu den bisher üblichen Reichweite-Definitionen, die von mehr oder weniger künstlichen Konstruktionen an empirischen Transmissionskurven ausgehen, wird hier eine Reichweite-Definition eingeführt, die von der Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung Gebrauch macht:

$$\bar{x} = \frac{1}{\Phi(0)} \int_0^{\infty} \Phi(x) dx. \quad (54)$$

Die mittlere Reichweite kann auch durch die Transformationsmatrix dargestellt werden:

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathbf{e}\mathbf{f}(0)} \int_0^{\infty} \mathbf{T}(x) dx \mathbf{f}(0) = -\frac{\mathbf{e}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}(0)}{\mathbf{e}\mathbf{f}(0)}; \quad (55)$$

es gilt darin

$$\int_0^{\infty} \mathbf{T}(x) dx = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{K}x} dx = \left[\mathbf{K}^{-1} e^{\mathbf{K}x} \right]_0^{\infty} = -\mathbf{K}^{-1}. \quad (55a)$$

Die über die unendlich dicke Schicht erstreckte Integration der Matrixfunktion $\mathbf{T}(x)$ ergibt somit die negative inverse Kernmatrix.

Bei einem diskretisierten Problem ist die Kernmatrix gleich der Koeffizientenmatrix eines D'ALEMBERTSchen Differentialgleichungssystems. In diesem Falle kann die inverse Koeffizientenmatrix stets gebildet werden. Bei einem nichtdiskreten Problem hängt die Invertierbarkeit von der Art der Kernfunktion ab [2].

Mit der Diskretisierung eines an sich nichtdiskreten Problems ist stets ein Verlust an Genauigkeit verbunden. Somit hängt die erzielbare Genauigkeit von dem Grad der Diskretisierung ab. Der derzeitige Stand der elektronischen Rechentechnik ermöglicht aber bereits einen derartig hohen Feinheitsgrad der Diskretisierung, daß praktisch – je nach Rechenaufwand – Ergebnisse mit beliebiger Genauigkeit erzielt werden können.

7.7 Vereinfachung der Rechnung durch Diskretisierung

Durch die Diskretisierung der BOLTZMANNschen Integrodifferentialgleichung (14) erhält man ein D'ALEMBERTSches Differentialgleichungssystem. Dieses System beschreibt eine endliche Anzahl miteinander durch Übergangswahrscheinlichkeiten gekoppelter Zustände. Läßt sich eine solche Zustandsfolge in einer linearen Kette anordnen, so spricht man von einer MARKOWSchen Kette [4]. Die Diskretisierung der Transportgleichung besteht hier darin, daß man die Energiedissipation der Strahlung über diskrete Energiestufen als eine MARKOWSche Kette auffassen kann.

Die Grundlage für diese Betrachtung wurde bereits in früheren Arbeiten von MELCHER [1,5] dargelegt. Darin wurde u.a. für den Teilchendurchgang durch Materieschichten ein Differentialgleichungssystem angegeben, das den Sachverhalt beschreibt, daß der Schwächungskoeffizient von Streuakt zu Streuakt eine Vergrößerung erfährt. Dieses lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (D'ALEMBERTSches System) wurde in einer Arbeit von GERTH [8] mit Hilfe der LAPLACE-Transformation gelöst, wobei das Ergebnis eine Matrixgleichung ist, die bei der Anwendung auf das Strahlungstransportproblem die Veränderung der Zustandsverteilung durch die Transmission beschreibt.

In der vorliegenden Arbeit kann nun aus der (spezialisierten) BOLTZMANNschen Transportgleichung die (diskretisierte) Transmissionsfunktion gefolgert werden, die sich - wie auf anderem Wege in [1] gezeigt wurde - in guter Näherung durch eine Summe von Exponentialfunktionen darstellen läßt. Damit ist nachgewiesen, daß sich die in [1] durch andere Überlegungen

gefundenen Transmissions- und Übertragungsfunktionen auch aus der allgemeinen Strahlungstransportgleichung herleiten lassen.

In den folgenden Beispielen soll an Hand dreireihiger Matrizen der Zusammenhang zwischen der Matrixschreibweise des Strahlungstransportes und den in [1] angegebenen Summenformeln der Transmission aufgezeigt werden. Diese Überlegungen lassen sich dann leicht auf Matrizen beliebiger Ordnung übertragen.

In Abb. 1 ist das Schema einer dreigliedrigen MARKOWSchen Kette angegeben, in der nur Folgereaktionen auftreten.

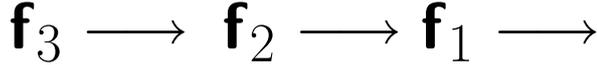


Abb. 1. Schema einer dreigliedrigen MARKOWSchen Kette

Dies entspricht dem physikalischen Sachverhalt, daß die Strahlungsteilchen bei der Streuung nur Energieänderungen im Sinne einer Abnahme erfahren. Die örtliche Änderung des Strahlungsflusses f_i der Energiestufe i wird durch den Abgang aus der Stufe i und dem Zugang aus der nächsthöheren benachbarten Stufe $i + 1$ bestimmt. Daraus ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dx} &= -\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 \\ \frac{df_2}{dx} &= -\mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 \\ \frac{df_3}{dx} &= -\mu_3 f_3 \end{aligned} \quad (56)$$

Die Kern- bzw. Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix} \quad (57)$$

ist eine Dreiecksmatrix mit negativen Elementen in der Hauptdiagonale. Aus dieser Tatsache folgt, daß die Eigenwerte (charakteristischen Wurzeln) einfach durch die Elemente der Hauptdiagonale gegeben sind. Weiterhin ist durch die negative Spur der Koeffizientenmatrix die Konvergenzbedingung für die LAPLACE-Transformation erfüllt.

Durch Anwendung der LAPLACE-Transformation nach Gl. (32) erhält man für die Transformationsmatrix im Bildraum

$$\tilde{\mathbf{T}}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\mu_1} & \frac{\mu_2}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)} & \frac{\mu_2\mu_3}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)(s+\mu_3)} \\ 0 & \frac{1}{s+\mu_2} & \frac{\mu_3}{(s+\mu_2)(s+\mu_3)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+\mu_3} \end{pmatrix} \quad (58)$$

Die Rücktransformation in den Originalraum ergibt – wie bei DOETSCH [3] beschrieben –

$$\mathbf{T}(s) = \begin{pmatrix} e^{-\mu_1 x} & \mu_2 e^{-\mu_1 x} * e^{-\mu_2 x} & \mu_2 \mu_3 e^{-\mu_1 x} * e^{-\mu_2 x} * e^{-\mu_3 x} \\ 0 & e^{-\mu_2 x} & \mu_3 e^{-\mu_2 x} * e^{-\mu_3 x} \\ 0 & 0 & e^{-\mu_3 x} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Die hierin enthaltenen Faltungsprodukte repräsentieren Summen von Exponentialfunktionen, für welche die Beziehung

$$\prod_{i=1}^n *e^{-\mu_i x} = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\mu_i x}}{\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (\mu_i - \mu_j)} \quad (60)$$

gilt. Durch diese Schreibweise wird eine übersichtlichere Darstellung der Transformationsmatrix erzielt als bei vollständiger Ausschreibung der Summen.

Die Kernmatrix nach Gl. (57) gibt den (vereinfachten) physikalischen Sachverhalt wieder, wonach angenommen wird, daß für jeden der diskreten Energiewerte die Integrale der Herausstreuung zu je einem Wert zusammengefaßt werden können, der dem Koeffizienten μ_i entspricht. Die negativen μ -Werte der Hauptdiagonale kennzeichnen die Herausstreuung aus dem diskretisierten Energieintervall, dagegen entsprechen die positiven μ -Werte der oberen Parallelreihe zur Hauptdiagonale der Hineinstreuung.

Diese vereinfachende Lösung hat sich bei vielen praktischen Berechnungen bewährt [1].

Zur Berechnung der mittleren Reichweite nach Gl. (55) für dieses Beispiel einer dreireihigen Kernmatrix hat man die inverse Matrix zu Gl. (57) zu bilden,

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu_1} & -\frac{1}{\mu_1} & -\frac{1}{\mu_1} \\ 0 & -\frac{1}{\mu_2} & -\frac{1}{\mu_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_3} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Der Dreieckscharakter der Matrix bleibt bei der Inversion erhalten. In den Zeilen der inversen Kernmatrix stehen – außer den verschwindenden Elementen unterhalb der Hauptdiagonale – stets gleiche Matrixelemente.

Zur Berechnung der mittleren Reichweite x für eine mono-energetische Strahlung braucht man nur die Elemente derjenigen Spalte der inversen Kernmatrix zu summieren, die der Energie der Strahlung entspricht, da in diesem Falle der Vektor $\mathbf{f}(0)$ in Gl. (55) nur aus einem von Null verschiedenen Element besteht. So erhält man dann für eine Strahlung der Energiestufe n :

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (62)$$

Hierin steht λ_i als Abkürzung für $\frac{1}{\mu_i}$ und kann als mittlere Weglänge zwischen zwei Wechselwirkungsakten gedeutet werden.

Es ergibt sich somit das physikalisch plausible Resultat, wonach die mittlere Reichweite der Strahlung aus der Summe der sukzessiv aufeinanderfolgenden (mittleren) Abstände zwischen den einzelnen Wechselwirkungsakten zusammengesetzt ist. In der Kette der Wechselwirkungsakte erfolgt die (diskrete) Abnahme der Energie von Stufe zu Stufe, so daß am Ende des Strahlungsweges die Anfangsenergie des Teilchens vollständig aufgebraucht ist.

In [1] wurde der spezielle Fall angegeben, daß alle μ -Werte gleich sind. Selbst diese etwas weitgehende Näherung gibt den Sachverhalt in befriedigender Weise wieder. Man geht dabei von der Annahme ans. daß es ein mittleres μ gebe, das für alle bei der Transmission der Strahlung auftretenden Energien näherungsweise gilt. Auch bei LANDAU [6] wurde bereits eine Beziehung angegeben, bei der die Wechselwirkung als energieunabhängig angesehen wurde. Für gleiche Werte von μ und damit auch λ folgt aus Gl. (62)

$$\bar{x}_n = \frac{n}{\mu} = n \cdot \lambda. \quad (63)$$

Die Größe n , die in [1] als Wechselwirkungsparameter (WW-Parameter) bezeichnet wurde, gibt die Anzahl der sukzessiven Wechselwirkungsakte an.

7.8 Einige Bemerkungen zur Behandlung der Winkelstreuung mit Matrixfunktionen

Die Behandlung der Transportgleichung (9) unter Berücksichtigung der Winkelstreuung ist ein außerordentlich viel komplizierteres Problem als die in der vorliegenden Arbeit vorgenommene alleinige Behandlung der Energiestreuung. Umfassende Lösungswege – auch unter Zuhilfenahme von Matrixfunktionen – sind in dem Buch über Neutronentransporttheorie von DAVISON [6] angegeben. Wegen der andersartigen Problemstellung findet darin aber die Matrixexponentialfunktion keine Anwendung.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß auch die Winkelstreuung durch einen zur Energiestreuung analogen Matrizenformalismus dargestellt werden kann. Der Vektor des Strahlungsflusses zu einer gegebenen (nichtvariablen) Energie besteht dann aus den Komponenten der (in beliebiger Reihenfolge angeordneten) Anteile des Raumwinkels. Die Schwierigkeiten ergeben sich vor allem bei der Beschreibung des Strahlungsweges, der im Falle der Winkelstreuung nicht mehr ohne weiteres als geradlinig angenommen werden darf. Im Extremfall können die Teilchen sogar rückgestreut werden. Hieraus resultiert eine Unbestimmtheit der Anfangsbedingungen. Nur bei einer stark nach vorn ausgezogenen Streuindikatrix und geringer Schichtdicke kann der oben entwickelte Matrizenformalismus eine brauchbare Näherung ergeben.

Somit läßt sich die Transformationseigenschaft der Matrizen insbesondere bei der Kleinwinkelstreuung vorteilhaft anwenden. Das Zusammenwirken von Winkel- und Energiestreuung führt zu keinen grundsätzlichen Komplikationen. Nach einer zweifachen Diskretisierung (bezüglich der Energie und des Raumwinkels) können beide Streuarten in Blockmatrizen miteinander kombiniert werden.

8 Zur numerischen Lösung der Transportgleichung

Aus den vorangegangenen Darlegungen ist ersichtlich, daß die numerische Behandlung der Integrodifferentialgleichung des Strahlungstransportes im allgemeinen – wenn man von einigen leicht lösbaren, meist auf groben Vereinfachungen beruhenden Spezialfällen absieht – deren Diskretisierung und damit Umwandlung in ein D’ALEMBERTSches Differentialgleichungssystem erfordert. Die Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt eine Näherungslösung der Integrodifferentialgleichung. Da die erzielbare Genauigkeit von dem Feinheitsgrad der Diskretisierung abhängt, kommt es darauf an, Differentialgleichungssysteme möglichst hoher Ordnung auszuwerten. Der hiermit verbundene Rechenaufwand kann in rationeller Weise nur noch mit modernen Hochleistungsrechenautomaten bewältigt werden.

So sei abschließend noch mitgeteilt, daß von den Verfassern Rechenprogramme zur numerischen Lösung des D'ALEMBERTSchen Differentialgleichungssystems für die polnische Rechenmaschine ODRA 1204 entwickelt und erprobt worden sind.

Die Rechnung basiert auf der Reihenentwicklung der Matrix-Exponentialfunktion. Man erhält die Transformationsmatrix mit einer Genauigkeit von 10 Dezimalstellen. Mit dem gleichen Programm kann ein eingegebener Anfangsvektor wiederholt transformiert werden. Durch linksseitige Multiplikation des Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor wird das dazugehörige Skalarprodukt gebildet. Das Programm gestattet auch das Multiplizieren und Potenzieren von Matrizen. Die Ordnung der quadratischen Matrizen ist prinzipiell beliebig; wegen der begrenzten Speicherkapazität der Rechenmaschine können aber (vorerst) nur Matrizen bis zur Ordnung 34 berechnet werden.³

Der Anwendungsbereich eines derartigen Rechenprogramms geht aber wesentlich über die numerische Behandlung der Probleme des Strahlungstransportes hinaus. Als weitere Anwendungsbeispiele seien genannt: radioaktive Umwandlungsreihen, Reaktionskinetik chemischer Prozesse, Diffusions-, Strömungs- und Leitungsvorgänge.

9 Zusammenfassung

Es wird die BOLTZMANNsche Integrodifferentialgleichung für das Strahlungstransportproblem aufgestellt und spezialisiert. Mit Hilfe des Matrizenformalismus wird die Nichtkommutativität der Strahlungstransmission durch zusammengesetzte Schichten verschiedenen Materials dargestellt. Insbesondere werden einige Folgerungen aus der Matrizendarstellung der Lösung der Transportgleichung gezogen, wobei sich u.a. eine neue Definition der Reichweite der Strahlung in Medien ergibt.

Für Diskussionen zu der Problematik der vorliegenden Arbeit danken die Verfasser Herrn Dr. DOMKE (Zentralinstitut für Astrophysik der DAW, Potsdam).

Literatur

- [1] [1] *Melcher, H.*: Transmission und Absorption. Ein allgemeines Gesetz für ionisierende Strahlungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970.
- [2] *Schmeidler, W.*: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Akad. Verlagsges. Geest/Portig K.-G., Leipzig 1955, 2. Aufl.
- [3] *Doetsch, G.*: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg Verl., München 1961, 2. Aufl.
- [4] *Bharucha-Reid, A. T.*: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York/Toronto/London 1960.

³Anmerkung bei der Präparation des Artikels zur Einstellung in das INTERNET im Jahre 2008 (E.G.): In den vergangenen 40 Jahren seit der Abfassung des Manuskriptes zu dem vorliegenden Artikel hat die Rechentechnik enorme Fortschritte gemacht, welche sich vor allem auf die Rechengeschwindigkeit, die Speicherkapazität und die graphische Darstellung der Rechenergebnisse beziehen, so daß die seinerzeit gegebenen Beschränkungen praktisch nicht mehr bestehen. Allerdings gilt weiterhin die gegenläufige Beziehung von Rechenzeit und Auflösung.

- [5] *Melcher, H.*: Zur mathematischen Darstellung und physikalischen Interpretation von Transmissionskurven. *Wiss. Zeitschr. P. H. Erfurt/Mühlhausen* **7** (1971) Heft 2, S. 81–88.
- [6] *Landau, L.*: On the Energy Loss of Fast Particles by Ionisation. *Journ. of Physics (UdSSR)* **8** (1944) 201–205.
- [7] *Davison, B.*: *Neutron Transport Theory*. Clarendon Press, Oxford 1958.
- [8] *Gerth, E.*: Zur analytischen Darstellung der Schwärzungskurve II. Die Belichtungsmatrix. *Z. wiss. Phot.* **64** (1970) S. 127–134.

o. Prof. Dr. rer. nat. habil. Horst Melcher,
Stellv. Direktor für Forschung der Sektion Mathematik/Physik
und Dr. so. nat. Ewald Gerth,
wiss. Mitarb. am Zentralinstitut
für Astrophysik der DAW, Potsdam

Der vorliegende Artikel in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der PH Erfurt wurde im Jahre 2008 mittels der modernen Computertechnik mit Schriftanalyse aufgenommen und textgetreu wiedergegeben. Die Textverarbeitung mit dem Satzprogramm LaTeX 2e erforderte die Anpassung der Symbole für Vektoren und Matrizen an die international gültige Schriebweise und einen Umbruch des Textes mit Veränderung der Paginierung bis auf die Anfangsseite.

Abstract: www.ewald-gerth.de/39abs.pdf

Analytical treatment of the radiative transfer by means of matrix functions

Horst Melcher¹ and Ewald Gerth²

¹ *Pedagogic College „Dr. Theodor Neubauer“, Erfurt-Mühlhausen, GDR*

² *Central Institute for Astrophysics of the Academy of Sciences of the GDR, Potsdam*

Abstract

The transport equation of BOLTZMANN is formulated and solved by means of an infinite equation of matrices for the case of the stationary rectilinear propagation of radiation with respect to energy scattering only. It is shown that the matrix formalism is the proper one to explain the qualities of transformations and the non-commutativity of the radiation transmitted through compound, heterogeneous layers of material.

The resolving matrix is represented as an expansion of a matrix exponential function, yielding at once the algorithm for the numerical calculation in a computer program. The linearity of the system of differential equations offers also the solution by using the LAPLACE-transformation, which reveals the structure of the resolving matrix in comparison with the expansion of the matrix exponential function.

The matrix formalism renders a comprehensive method for analytical derivation, numerical computation, and definition of relations among different interacting physical magnitudes. Thus, using the matrix calculus, a new definition for the average length of reach of the radiative transfer through an absorbing medium could be given in form of the inverse kernel matrix of the transport equation.

Publication

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE

„DR. THEODOR NEUBAUER“ ERFURT-MÜHLHAUSEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe, 9. Jahrgang 1972, Heft 1, Nr. 145, S. 3–10

Eingegangen am 25. 11. 1970

SCIENTIFIC JOURNAL OF THE PEDAGOGIC COLLEGE

„DR. THEODOR NEUBAUER“ ERFURT-MÜHLHAUSEN

Mathematical-scientific row, 8. Year 1972, Volume 1, No. 145, p. 3–10

Received 1970, November 25th

Article available in German by the web-address: www.ewald-gerth.de/39.pdf

Institution of the authors in 1972

Professor Dr. rer. nat. habil. Horst Melcher

Pedagogic College “Dr. Theodor Neubauer” Erfurt-Mühlhausen,

leader of the scientific area of Experimental Physics I

of the section Mathematics/Physics

Dr. sc. nat. Ewald Gerth

Central Institute of Astrophysics of the Academy of Sciences of the GDR,

Potsdam, East Germany