
Sonderdruck aus

Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie

Band 60 • Heft 1—8

JOHANN AMBROSIUS BARTH • LEIPZIG

Printed in Germany

DK 771.534.53: 771.534.533

Zur analytischen Darstellung der Schwärzungskurve I. Der Schichtdickeneffekt

Von Ewald Gerth

Pädagogische Hochschule Potsdam, Institut für Physik, Abteilung Isotopentechnik

Mit 13 Abbildungen

Herrn Prof. Dr. J. Picht dankbar und hochachtungsvoll zum 70. Geburtstag gewidmet

Das Fehlen einer eindeutigen analytischen Formulierung des Zusammenhanges zwischen der Belichtung und der resultierenden Schwärzung einer photographischen Schicht erweist sich gegenwärtig noch als ein großes Hemmnis bei der Überprüfung und Beurteilung von Schlußfolgerungen aus der Theorie des photographischen Prozesses.

Die vorliegende Arbeit knüpft an Betrachtungen über den Schwarzschild-Effekt und die sich daraus ergebende Möglichkeit zu einer analytischen Darstellung der Schwärzungskurve an, die in [1] veröffentlicht wurden. Auf der Grundlage des dort angegebenen Lösungsweges soll im folgenden eine umfassendere und dabei einfachere Formulierung der Schwärzungskurve angegeben werden.

1. Aufstellung einer allgemeinen Formel für den Zusammenhang zwischen Belichtung und Schwärzung der Photoschicht

1.1. Voraussetzungen

Die Schwärzung einer photographischen Schicht hängt von mehreren Parametern ab. So bestimmen die Parameter der Emulsion, der Belichtung, der Verarbeitung und der Nachbehandlung die Gestalt der Schwärzungskurve.

Neben den Parametern der Emulsion (Empfindlichkeit, Keimordnung, Schwärzung der unentwickelten Schicht) und denen der Belichtung (Intensität und Zeit) werden durch die folgende Formulierung auch solche Parameter erfaßt, die in einem linearen Zusammenhang mit der Sättigungsschwärzung stehen, wie beispielsweise — in begrenzten Bereichen — die Parameter der Entwicklung und der Nachbehandlung.

Es muß natürlich eine homogene Einwirkung solcher Agenzien wie Entwickler, Verstärker usw. im gesamten Schichtvolumen vorausgesetzt werden. Das gilt insbesondere auch für die Entwicklung, die in der folgenden Ableitung als unabhängig von der Schichttiefe angenommen wird. In der Praxis bedeutet dies, daß die Zeit des Eindiffundierens des Entwicklers in die Schicht klein gegenüber der Entwicklungszeit sein muß.

Die Verschleierung mit zunehmender Entwicklungszeit wird nicht berücksichtigt, um die folgenden Ableitungen möglichst übersichtlich zu halten; sie könnte selbstverständlich in einer erweiterten Formel mit erfaßt werden.

1.2. Herleitung der allgemeinen Schwärzungsformel

Die Schwärzung ist nach [1] eine Funktion der Wahrscheinlichkeit $W(E, t)$ für die Reduktion der in der Schicht enthaltenen Silberbromidkörner. W selbst ist eine Funktion der Parameter der Belichtung, nämlich der Intensität E und der Zeit t . Die Reduktionswahrscheinlichkeit W_i der i -ten Partialschicht ist dadurch gegeben, daß durch die Schwärzung der darüberliegenden unentwickelten Partialschichten eine Intensitätsschwächung erfolgt.

Mit der spezifischen Schwärzung D der unentwickelten Schicht

$$D = \frac{S_D}{x_0}, \quad (1)$$

worin S_D die Schwärzung der unentwickelten Schicht und x_0 die Schichtdicke ist, erhält man nach dem Lambertschen Gesetz für die Lichtintensität in der i -ten Partialschicht mit der Schichttiefe x_i

$$E_i = E \cdot 10^{-Dx_i} \quad (2)$$

und somit deren Reduktionswahrscheinlichkeit

$$W_i(E_i, t) = W(E \cdot 10^{-Dx_i}, t). \quad (3)$$

Für eine Gesamtschicht, die sich aus j Partialschichten gleicher Dicke zusammensetzt, kann man die Gesamtschwärzung S analog zu [1] nach der Summenformel

$$S = \frac{S_0}{j} \sum_{i=1}^j W(E \cdot 10^{-Dx_i}, t) \quad (4)$$

berechnen, die für den infinitesimalen Grenzfall unendlich vieler, in ihrer Dicke gegen Null strebender Partialschichten in die Integralformel für die Schwärzung

$$S = \frac{S_0}{x_0} \int_0^{x_0} W(E \cdot 10^{-Dx}, t) dx \quad (5)$$

übergeht, worin S_0 die Sättigungsschwärzung der Gesamtschicht ist.

Im Rahmen der unter 1.1. genannten Voraussetzungen ist durch Gl. (5) ein allgemeiner analytischer Ausdruck für die Abhängigkeit der Schwärzung von der Belichtung und den linearen Parametern der Emulsion und der Verarbeitung sowie Nachbehandlung gegeben, die implizit in S_0 enthalten sind.

Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(E, t)$, die hier als die „Erzeugende der Schwärzungskurve“ bezeichnet wird, werden in diesem Abschnitt noch keine näheren Aussagen gemacht. Gl. (5) gilt daher für beliebige Schwärzungskurven — auch unter Einbeziehung der Korngrößenverteilung und der photographischen Effekte.

2. Die Schwärzungskurve in einem Schwarzschild-Bereich¹⁾

Für einen Schwarzschild-Bereich ist die Reduktionswahrscheinlichkeit der als gleichgroß angenommenen Silberbromidkörner in der Schichttiefe x — wie in [1, Gl. (28) und 29)] beschrieben — durch das Poissonsche Verteilungsgesetz gegeben zu

$$W = 1 - 10^{-(\varepsilon E t^p \cdot 10^{-Dx})^n} \quad (6)$$

Gl. (6) ergibt mit Gl. (4) die Summenformel [1, Gl. (31)]

$$S = S_0 \left[1 - \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j 10^{-(\varepsilon E t^p \cdot 10^{-Dx_i})^n} \right] \quad (7)$$

und mit Gl. (5) die Integralformel [1, Gl. (32)]

$$S = S_0 \left[1 - \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} 10^{-(\varepsilon E t^p \cdot 10^{-Dx})^n} dx \right] \quad (8)$$

der Schwärzung in einem Schwarzschild-Bereich.

ε ist ein Empfindlichkeitskoeffizient, n die Keimordnung und $p = 1 - \frac{1}{n}$ der Schwarzschild-Exponent.

Für die weitere Auswertung von Gl. (8) empfiehlt es sich, die darin enthaltenen Exponentialfunktionen auf die Basis e zu beziehen. Es gilt dann definitionsgemäß:

$$\varepsilon^* = \varepsilon \sqrt[n]{\ln 10} \quad (9a)$$

$$D^* = D \ln 10 \quad (9b)$$

$$D^* x_0 = S_{D^*} = S_D \ln 10. \quad (9c)$$

Durch Substitution von

$$(\varepsilon^* E t^p e^{-D^* x})^n = u \quad (10)$$

läßt sich Gl. (8) in

$$S = S_0 \left(1 + \frac{1}{n S_{D^*}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u}}{u} du \right) \quad (11)$$

verwandeln.

Mit dem bei Jahnke-Emde [2] tabellierten Exponentialintegral²⁾ ergibt sich aus Gl. (11) die Schwärzung in einem Schwarzschild-Bereich (ohne Berücksichtigung des Solarisationseffektes der Regression und der Korngrößenverteilung der Silberbromidkörner) zu

$$S = S_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n S_{D^*}} [Ei(-[\varepsilon^* E t^p \cdot e^{-S_{D^*}}]^n) - Ei(-[\varepsilon^* E t^p]^n)] \right\}. \quad (12)$$

¹⁾ Unter einem Schwarzschild-Bereich ist ein Gebiet der Funktion $S = f(E, t)$ zu verstehen, in dem das Schwarzschild-Gesetz in guter Näherung gilt.

²⁾ Definitionen und Formelherleitungen sind im Anhang (S. 126) enthalten.

An Gl. (12) ist bemerkenswert, daß die Schichttiefe x bzw. Schichtdicke x_0 , die zur Herleitung von Gl. (8) als Hilfsgrößen verwendet wurden, nicht mehr auftritt. Die Schwärzung S ist ein Maß für die Lichtschwächung durch eine Schicht; sie ist bei konstanter, über die schichttiefe, integrierte Flächendichte

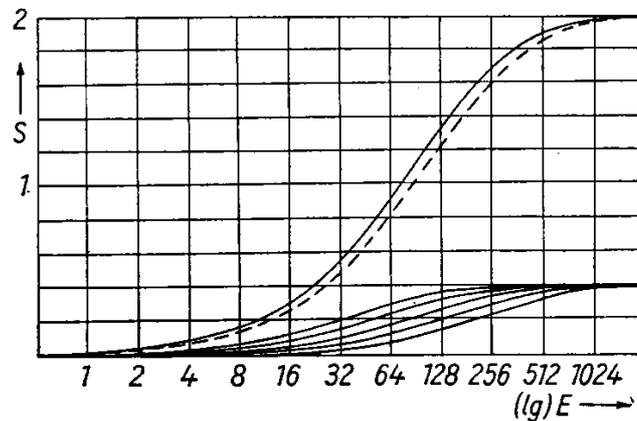


Abb. 1. Schar der Partialschwärzungskurven und Gesamtschwärzungskurven für $n = 1$ a) nach der Summenformel (7) mit $j = 5$ berechnet (ausgezogen), b) nach der Integralformel (8) berechnet (gestrichelt). Folgende Konstanten wurden verwendet: $S_0 = 2$, $D = 500 \text{ cm}^{-1}$, $S_D = 1$, $\varepsilon = 0,01$, $x_0 = 20 \mu\text{m}$, $t = 1$ (Angabe von p ist damit nicht erforderlich).

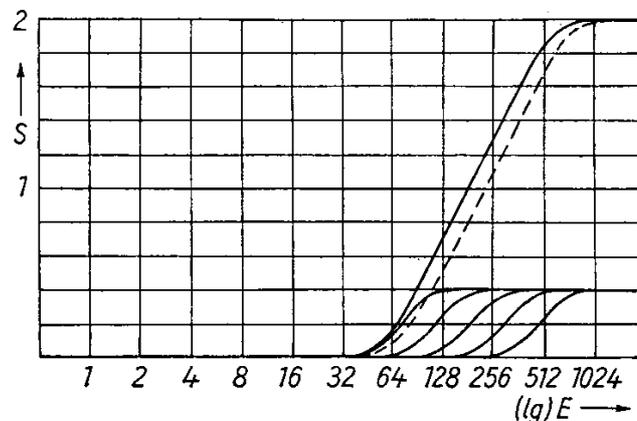


Abb. 2. Schar der Partialschwärzungskurven und Gesamtschwärzungskurve für $n = 4$ (alle übrigen Angaben wie zu Abb. 1)

der absorbierenden Zentren von der Dicke der Schicht unabhängig. In Gl. (12) werden nur Konstanten verwendet, die der gesamten Schicht eigen sind: die Sättigungsschwärzung S_0 , die Schwärzung der unentwickelten Schicht S_D , der Empfindlichkeitskoeffizient ε (vgl. hierzu 9a, b, c), die Keimordnungszahl n und damit auch der Schwarzschild-Exponent p .

In Abb. 1 und 2 sind zwei nach Gl. (12) berechnete Schwärzungskurven dargestellt. Es wurden die gleichen Konstanten verwendet wie für die nach der Summenformel (7) berechneten Kurven in [1, Abb. 3 und 4].

Um die Brauchbarkeit der Summen-Näherungsformel (7) für praktische Berechnungen der Schwärzung näher zu untersuchen, wurde zu den unter Abb. 1 angegebenen Werten der Konstanten die Gesamtschwärzung nach der Summenformel (7) für die relative Intensität $E = 64$ bei Zerlegung der Schicht in $j = 1, j = 2, j = 3$ bis $j = 10$ Partialschichten berechnet. Es ergibt sich bei Verbindung der erhaltenen Punkte eine Kurve, die nur sehr schwach gegen den nach der Integralformel (12) berechneten Wert für $E = 64$ konvergiert (Abb. 3), $S_{64} = 0,808$.

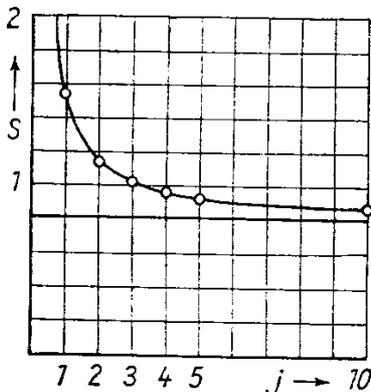


Abb. 3. Nach der Summenformel (7) für $E = 64$ berechnete Schwärzung in Abhängigkeit von der Zahl j der Partialschichten, in die die Gesamtschicht zerlegt wurde

Die Summenformel (7) ergibt eine mit wachsendem j konvergierende Folge von Obersummen zu der Exponentialintegralfunktion Gl. (12). Bei einer Zerlegung der Gesamtschicht in etwa vier bis fünf Partialschichten entspricht die gegenseitige Verschiebung der nach den beiden Formeln berechneten Kurven etwa der halben Schwärzung einer Partialschicht in noch unentwickeltem Zustand. Dies ist darauf zurückzuführen, daß für die erste Partialschicht noch keine Abdeckung durch darüberliegende Schichten angenommen wurde. Genau genommen müßte aber auch für diese Schicht schon eine Abdeckung innerhalb der Schicht berücksichtigt werden. Diese Betrachtungen zeigen, daß bei der Berechnung von Schwärzungen innerhalb von Schwarzschild-Bereichen der Gl. (12) gegenüber der Summenformel (7) der Vorzug zu geben ist. Darüber hinaus ist die Berechnung der Schwärzung an Hand einer Tabelle der Exponentialintegralfunktion weniger aufwendig als nach der Summenformel.

2.1. Näherungsformeln für die Schwärzung im Schwarzschild-Bereich

Für kleine Werte des Argumentes der Exponentialintegralfunktion u ($u < 0,01$), für die das Exponentialintegral nicht tabelliert ist, kann man nach Jahnke-Emde [2]

$$Ei(-u) = \ln u + C \quad (13)$$

schreiben. C ist die Eulersche Konstante mit dem (auf 5 Dezimalstellen gerundeten) Zahlenwert 0,57722.

Wenn sich die beiden Argumente der Exponentialintegrale in Gl. (12) durch den Faktor $e^{-n S_{D^*}}$ sehr stark unterscheiden, so wird für hinreichend große Werte von E und damit auch der Schwärzung das zweite Exponentialintegral in Gl. (12) sehr klein und kann gegenüber dem ersten Exponentialintegral in dieser Gleichung vernachlässigt werden,

$$S = S_0 \left[1 + \frac{1}{n S_{D^*}} Ei(-[\varepsilon^* E t^p e^{-S_{D^*}}]^n) \right]. \quad (14)$$

Betrachtet man nur solche Werte von E , für die das Argument des noch in Gl. (14) verbliebenen Exponentialintegrals klein wird, so kann Gl. (14) unter Benutzung von Gl. (13) als Geradengleichung dargestellt werden,

$$S = \frac{S_0}{S_{D^*}} \left[\ln(\varepsilon^* E t^p) + \frac{1}{n} C \right]. \quad (15)$$

Die obengenannten Bedingungen, die beispielsweise bei der Berechnung der gestrichelten Kurve in Abb. 2 für einen großen Bereich erfüllt waren, kennzeichnen den (quasi-)linearen Teil der Schwärzungskurve. Gl. (15) kann auch als die analytische Darstellung einer idealisierten, linearen Schwärzungskurve aufgefaßt werden. An Gl. (15) ist weiterhin interessant, daß bei Vorhandensein eines linearen Bereiches der Schwärzungskurve der Anstieg in demselben nicht von der Keimordnungszahl n bestimmt wird. Berechnet man nämlich nach Gl. (15) die γ -Werte der linearen Schwärzungskurven für Intensitäts- und für Zeitvariation, so findet man

$$\gamma_E = \frac{\partial S}{\partial \lg E} = \frac{S_0}{S_D} \quad (16a)$$

und

$$\gamma_t = \frac{\partial S}{\partial \lg t} = p \frac{S_0}{S_D}. \quad (16b)$$

Der Quotient von γ_t und γ_E liefert in bekannter Weise den Schwarzschild-Exponenten p .

Zur Berechnung von Schwärzungswerten im Gebiet des Durchhanges der Schwärzungskurve kann Gl. (8) unmittelbar in eine Reihe entwickelt und gliedweise integriert werden (s. Anhang S. 126),

$$\begin{aligned} S &= \frac{S_0}{n S_D} (\varepsilon E t^p)^n \left[(1 - 10^{-n S_D}) - \frac{(\varepsilon E t^p)^n}{2! 2 \lg e} (1 - 10^{-2n S_D}) + \dots \right] \\ &= \frac{S_0}{n S_D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! k} (\varepsilon E t^p)^{kn} (\ln 10)^{k-1} (1 - 10^{-kn S_D}). \end{aligned} \quad (17)$$

Der Abbruch der Reihe nach dem zweiten Gliede dürfte für

$$(E t^p)^n < 0,5 \quad (18)$$

in den meisten praktischen Fällen gerechtfertigt sein.

Berücksichtigt man nur das erste Glied der Reihe, so erhält man die Schwärzung als lineare Funktion der Belichtung $(E t^p)^n$. Die Gültigkeit einer solchen Beziehung für das Gebiet des Durchhanges ist aus der Praxis bekannt. Sie wird u. a. bei der Dosismessung in der Kernstrahlungsmeßtechnik ausgenutzt.

Bei der Einwirkung von Kernstrahlung bzw. Röntgenstrahlung auf photographische Schichten sind die Keimordnungszahl n und der Schwarzschild-Exponent p stets 1, da infolge der großen Elektronenausbeute der Kernstrahlungsquanten bzw. Röntgenquanten nur Aufbaureaktionen von Belichtungskeimen eintreten können, ohne daß sich auch nur in einer Stufe der „Kaskade“ [1] ein Gleichgewicht zwischen Aufbau- und Abbaureaktionen einstellen kann.

Wegen der „Durchsichtigkeit“ der Schicht für diese Strahlungsarten (insbesondere Gamma- und Röntgenstrahlen) strebt die „Schwärzung“ der unentwickelten Schicht, d. h. ihr Absorptionsvermögen für diese Strahlenarten, gegen

Null, und man erhält aus Gl. (17) mit $n = 1$, $p = 1$ und $S_D \rightarrow 0$

$$S = S_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\varepsilon E t \cdot \ln 10)^k (-1)^{k-1}. \quad (19)$$

Für hinreichend kleine Bestrahlungen $E t$ kann man die Reihe (19) nach dem 1. Gliede abbrechen,

$$S = S_0 \varepsilon \ln 10 \cdot E t = \text{const} \cdot E t, \quad (20)$$

womit die aus der Praxis bekannte lineare Beziehung zwischen Bestrahlung und Schwärzung im Bereich kleiner Schwärzungen durch die obige Ableitung bestätigt wird.

Gl. (20) kann zu einer Definition der Empfindlichkeit photographischer Schichten für Röntgenstrahlung verwendet werden. ε läßt sich aus einer Eichbestrahlung $E t$ und dem Verhältnis von Testschwärzung S und Sättigungsschwärzung S_0 ermitteln. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Sättigungsschwärzung nur im Falle des Fehlens der Solarisation mit der Maximalschwärzung identisch ist [1]. Bei Kenntnis der Wendepunktsabszisse der Schwärzungskurve ist eine Schwärzungsmessung zur Ermittlung von ε nicht erforderlich (s. 5.).

3. Die Schwärzungsformel auf der Grundlage der Reduktionswahrscheinlichkeit gemäß einer Poisson-Verteilung mit einer verallgemeinerten Belichtungsfunktion

Den bisherigen Betrachtungen lag die Voraussetzung zugrunde, daß die Belichtungswirkung in dem gesamten von der Berechnung erfaßten Belichtungsbereich der Schwarzschild-Beziehung

$$E t^p = \text{const} \quad (21)$$

genüge. Diese Voraussetzung ist aber im allgemeinen nicht erfüllt. Der Schwarzschild-Exponent kann sogar [bei allgemeiner Gültigkeit von Gl. (21), wobei $p = f(E, t)$ ist] in Abhängigkeit von der Intensität E mit der Schichttiefe x variieren.

Eine allgemeinere Formel für die Schwärzung erhält man, wenn man anstatt der Schwarzschild-Beziehung Gl. (21) in die mittlere Zellenbesetzungszahl der Poisson-Verteilung eine beliebige Abhängigkeit von E und t einführt, so daß sich mit Hilfe der Erzeugenden der Schwärzungskurve (Reduktionswahrscheinlichkeit)

$$W = 1 - e^{-f(E, t)} \quad (22)$$

die Schwärzung nach Gl. (5) aus

$$S = S_0 \left[1 - \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} e^{-f(E e^{-D^* x}, t)} dx \right] \quad (23)$$

errechnen läßt.

Mit der Substitution

$$u = f(E e^{-D^* x}, t) \quad (24)$$

und der daraus folgenden inversen Funktion

$$E e^{-D^* x} = \varphi(u, t) \quad (25)$$

ergibt sich

$$S = S_0 \left(1 + \frac{f(E e^{-S_{D^*}}, t)}{S_{D^*}} \int \frac{e^{-u}}{\varphi(u, t)} \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial u} du \right). \quad (26)$$

Die Lösung des Integrals nach Gl. (26) bereitet im allgemeinen große Schwierigkeiten. Im Spezialfall der Gültigkeit des Schwarzschild-Gesetzes nach Gl. (21) läßt sich Gl. (26) durch eine Exponentialintegralfunktion ausdrücken, wie man sich durch Einsetzen von Gl. (10) in Verbindung mit Gl. (25) leicht überzeugt. Gilt aber in dem betrachteten Bereich ein komplizierteres Belichtungsgesetz, wie z. B.

$$\left(\sqrt{1 + a E} - 1 \right) t^{1 - \frac{1}{n}} = \text{const} \quad [1], \quad (27)$$

so kann man das Integral nach Gl. (26) nicht mehr auf Grundintegrale zurückführen und ist dann auf graphische oder numerische Näherungsverfahren angewiesen.

Die Berechnung von Gl. (26) mit Gl. (27) ist von besonderem Interesse, da gemäß einem in [1] dargelegten theoretischen Ansatz durch Gl. (27) das Reziprozitätsverhalten der photographischen Schicht im Bereich des normalen und des inversen Schwarzschild-Effektes bei kontinuierlichem Übergang beschrieben wird.

Mit der Substitution

$$u = \left(\sqrt{1 + a E e^{-D^* x}} - 1 \right)^n \cdot t^{n-1} \quad (28)$$

folgt aus Gl. (26)

$$S = S_0 \left(1 + \frac{2}{n S_{D^*}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u}}{u} \frac{u^{\frac{1}{n}} + t^{1 - \frac{1}{n}}}{u^{\frac{1}{n}} + 2t^{1 - \frac{1}{n}}} du \right), \quad (29)$$

worin die Grenzen gegeben sind durch

$$u_1 = \left(\sqrt{1 + a E} - 1 \right)^n t^{n-1} \quad (30 a)$$

und

$$u_2 = \left(\sqrt{1 + a E e^{-S_{D^*}}} - 1 \right)^n t^{n-1}. \quad (30 b)$$

Für sehr große und sehr kleine Werte von u geht das Integral in Gl. (29) jeweils in ein Exponentialintegral über. Beide Grenzlagen unterscheiden sich aber um den Faktor 2.

Bei niedrigen Intensitäten und damit kleinen Werten von u gilt nach [1] (dort Gl. 4) wegen der Proportionalität der Elektronenkonzentration im Silberbromid-Kristallgitter zur Lichtintensität das Schwarzschild-Gesetz in der

üblichen Form Gl. (21). Bei hohen Intensitäten ist dagegen nach [1] (dort Gl. 5) die Elektronenkonzentration der Quadratwurzel der Lichtintensität proportional.

Für niedrige Intensitäten ergibt sich mit $\frac{a}{2} = \varepsilon^*$, $n = 4$ und $1 - \frac{1}{n} = p$ die Gl. (12). Für hohe Intensitäten geht dagegen Gl. (29) in

$$S = \dot{S}_0 \left\{ 1 + \frac{2}{n S_{D^*}} \left[Ei \left(-[a E e^{-S_{D^*}}]^{\frac{n}{2}} t^{n-1} \right) - Ei \left(-[a E]^{\frac{n}{2}} t^{n-1} \right) \right] \right\} \quad (31)$$

über. Der zunächst naheliegende Versuch, den Anstieg der Kurve nach Gl. (31) analog zu Gl. (15) zu bestimmen, indem man durch Vernachlässigung des zweiten Exponentialintegrals in Gl. (31) und Beschränkung auf kleine Argumente des ersten Gliedes den γ -Wert des geradlinigen Teiles der Schwärzungskurve berechnet, führt zu dem überraschenden Ergebnis

$$S = \frac{S_0}{S_{D^*}} \left[\ln \left(a E t^{1-\frac{1}{n}} \right) + \frac{2}{n} C \right], \quad (32)$$

wonach der γ_E -Wert sich wiederum zu S_0/S_D wie in Gl. (16a) ergibt, somit also in diesem Bereich der Kurve unabhängig von den besonderen Belichtungseigenschaften der Emulsion ist.

Gewiß ist, daß durch Gl. (16a) der größtmögliche γ_E -Wert einer Schicht angegeben wird. Dieser Grenzwert, der 1924 zuerst von Buisson und Fabry [11] auf andere Weise hergeleitet wurde, wird aber durchaus nicht in allen Fällen erreicht. Er tritt in guter Näherung auf, wenn die Argumente der Exponentialintegralfunktion in Gl. (12) bzw. Gl. (31) um mehrere Größenordnungen verschieden sind.

Dies ist um so mehr der Fall, je größer n ist. Der Exponent $\frac{n}{2}$ in Gl. (31) bewirkt dagegen wieder eine Verringerung des Unterschiedes der Argumente, so daß eine Vernachlässigung des zweiten Exponentialintegrals in Gl. (31) nicht zulässig ist.

Diese Zusammenhänge kann man sich besonders deutlich klar machen, wenn man von der Zerlegung der Gesamtschicht in eine Anzahl von Partialschichten ausgeht. Erreicht die erste Partialschicht ihren Sättigungswert wesentlich vor dem Schwellenwert der letzten Partialschicht, so erfolgt eine lineare Summation der Sättigungsschwärzungen der einzelnen Partialschichten, die wegen der äquidistanten Versetzung der einzelnen Partialschwärzungskurven in Abhängigkeit von der Schichttiefe in Richtung der $\log E$ -Achse unabhängig von einer weiteren Verkürzung des Abstandes zwischen Schwellenwert und Sättigungswert einer Partialschicht eine lineare Schwärzungskurve (vgl. Abb. 2) ergibt.

Aus Gl. (16a) entnimmt man weiterhin, daß durch Vergrößerung der Sättigungsschwärzung S_0 bei gleichbleibender Schwärzung der unentwickelten Schicht S_D der γ -Wert vergrößert werden kann. Dies ist beispielsweise mit Hilfe von photochemischen Verstärkern möglich. Die Vergrößerung der Schichtdicke bewirkt bei linearen Schwärzungskurven keine Änderung des γ -Wertes, da der Quotient S_0/S_D konstant bleibt. Gegen S_0/S_D konvergiert der maximale γ -Wert jeder beliebigen Schwärzungskurve bei wachsender Schichtdicke. Man entnimmt

dies unmittelbar aus Gl. (12), wenn man S_D sehr groß und damit das Argument des ersten Exponentialintegrals sehr klein werden läßt, so daß man darauf die Beziehung nach Gl. (13) anwenden kann.

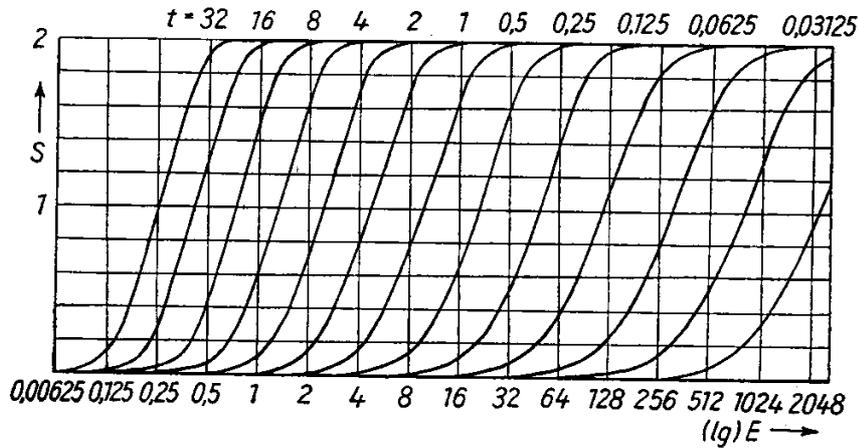


Abb. 4. Mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine (SER 2)¹⁾ berechnete Schar von log E-Schwärzungskurven; Parameter: Belichtungszeit t. Die Belichtungszeiten zweier benachbarter Kurven unterscheiden sich jeweils um den Faktor 2. Daten der Kurvenberechnung: $S_0 = 2$, $S_D = 0,5$, $a = 0,01$, $n = 4$

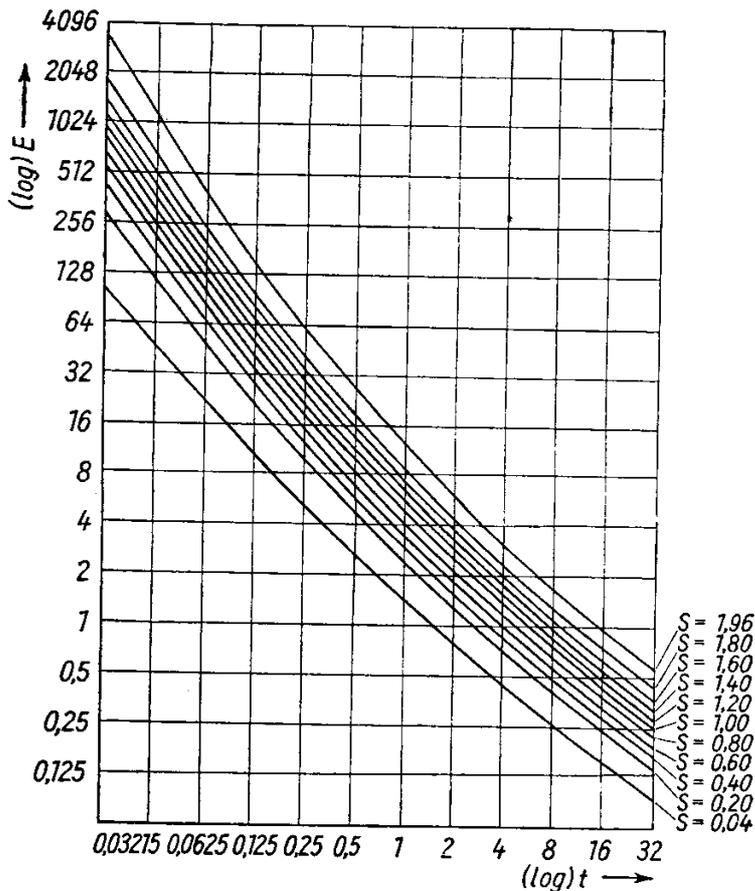


Abb. 5. Äquidensitogramm der log t-log E-Schwärzungsfläche nach Gl. (29) mit den Daten von Abb. 4

¹⁾ Die Programmierung und Berechnung der Schwärzungskurven erfolgten in der Rechenstelle des Mathematischen Institutes der Pädagogischen Hochschule Potsdam.

Um einen Überblick über die Veränderung der Gestalt der Schwärzungskurve nach Gl. (29) im Übergangsbereich vom normalen zum inversen Schwarzschild-Effekt zu erhalten, wurde eine Schar von $\lg E$ -Schwärzungskurven mit der Belichtungszeit als Parameter mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine berechnet (Abb. 4).

Aus Abb. 4 ist zu ersehen, daß mit verringerter Belichtungszeit die anfänglich in einem großen Bereich lineare Schwärzungskurve mehr und mehr in eine f -Form übergeht, wobei in zunehmendem Maße eine Gradationsverflachung eintritt.

Aus dem Abstand der Kurven in Abb. 4 kann man nach [3] den Schwarzschild-Exponenten ermitteln.

Die Veränderung der Kurvenform in Abhängigkeit von der Belichtungszeit läßt sich mit dem Ultrakurzzeiteffekt [4] in Einklang bringen, der hier seine theoretische Begründung durch den Schwarzschild-Effekt findet.

Trägt man die Werte von Abb. 4 für bestimmte Schwärzungen in ein $\log t$ - $\log E$ -Koordinatensystem ein, so erhält man ein (konstruiertes) Äquidensitogramm einer $\log t$ - $\log E$ -Schwärzungsfläche [3, 5, 6] von Gl. (29) für das Übergangsbereich vom normalen zum inversen Schwarzschild-Effekt (Abb. 5). Die Neigung der Äquidensiten ergibt in jedem Punkt der Schwärzungsfläche den Schwarzschild-Exponenten p an.

4. Ein halbgraphisches Verfahren zur Ermittlung der Schwärzung bei Vorgabe beliebiger Reduktionswahrscheinlichkeitsfunktionen

Neben der elektronischen Berechnung von Schwärzungskurven sei noch eine weitere, rationelle Methode zur halbgraphischen Ermittlung der Schwärzung in Abhängigkeit von der Belichtung bei beliebiger Verknüpfung der Variablen $E e^{-S_D}$ und t in Gl. (24) angeführt.

Differenziert man zunächst — zur Bestimmung des γ_E -Wertes — die Schwärzungsformel (26) mit der allgemeinen Belichtungsfunktion, so erhält man den sehr einfachen Ausdruck

$$\gamma_E = \frac{\partial S}{\partial \lg E} = \frac{S_0}{S_D} \left[e^{-f(E e^{-S_D}, t)} - e^{-f(E, t)} \right], \quad (33)$$

der offenbar in der Klammer die Differenz der Reduktionswahrscheinlichkeiten nach Gl. (22) mit der Intensität hinter der Schicht und vor der Schicht enthält. Man erkennt dies sofort, wenn man bedenkt, daß Gl. (33) durch Differentiation des bestimmten Integrals in Gl. (23) nach einem Parameter gewonnen wurde.

Da die Schwärzungsfunktion in der allgemeinen Form nach Gl. (5) eine in dem gesamten Definitionsbereich stetige Funktion ist, kann die Differentiation nach einem Parameter (in diesem Falle E) unter dem Integralzeichen vorgenommen werden,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{S_0}{x_0} \int_0^{x_0} \frac{\partial W(E e^{-D^* x}, t)}{\partial (E e^{-D^* x})} \frac{\partial (E e^{-D^* x})}{\partial E} dx. \quad (34)$$

Mit

$$\frac{\partial (E e^{-D^* x})}{\partial x} = -D^* E e^{-D^* x}, \quad (35 a)$$

$$\frac{\partial (E e^{-D^* x})}{\partial E} = e^{-D^* x} \quad (35 b)$$

und den Grenzen

$$W_1 = W(E, t) \quad (36 a)$$

sowie

$$W_2 = W(E e^{-S_D^*}, t) \quad (36 b)$$

geht Gl. (34) in

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{S_0}{S_{D^*} E} \int_{W_1}^{W_2} dW = \frac{S_0}{S_{D^*} E} (W_1 - W_2) \quad (37)$$

über. Hieraus folgt entsprechend Gl. (33) mit Gl. (9c)

$$\gamma_E = \frac{S_0}{S_D} [W(E, t) - W(E \cdot 10^{-S_D}, t)]. \quad (38)$$

Mit Gl. (22) erhält man aus Gl. (38) wieder Gl. (33).

Wenn die Reduktionswahrscheinlichkeit $W(E, t)$ in beliebiger Form analytisch gegeben ist, bereitet die Berechnung von $\gamma_E = f(E, t, S_0, S_D)$ keine mathematischen Schwierigkeiten und ist stets elementar ausführbar.

Aus Gl. (38) ist wiederum zu entnehmen, daß auch im allgemeinen Fall — in Übereinstimmung mit den Angaben von Buisson und Fabry [11] — der Quotient S_0/S_D der größte γ_E -Wert ist, den man mit einer gegebenen Emulsion erreichen kann, denn die Differenz der beiden Funktionswerte in Gl. (38) kann — wie die Wahrscheinlichkeit selbst — nicht größer als Eins werden.

Gl. (33) besitzt — falls die Belichtungsfunktion $f(E, t)$ monoton und stets positiv ist — einen Extremwert, der für eine Differenz von Exponentialfunktionen mit negativen Exponenten typisch ist. Dieser Extremwert kennzeichnet gleichzeitig die Abszisse des Wendepunktes der Schwärzungskurve. Die Schwärzungskurve ist (sofern von photographischen Effekten mit Ausnahme des Schwarzschild-Effektes abgesehen wird), nur einen Wendepunkt, der im Falle eines (quasi-)linearen Verlaufes der Schwärzungskurve von höherer Ordnung sein kann. Für einen Schwarzschild-Bereich erhält man den Intensitätswert E_w des Wendepunktes der Schwärzungskurve explizite,

$$E_w = \frac{1}{\varepsilon^* t^p} \sqrt[n]{\frac{n S_{D^*}}{1 - e^{-n S_{D^*}}}}. \quad (39)$$

Aus Gl. (33) folgt weiterhin, daß das erste Glied in der Klammer mit wachsender Schichtdicke gegen Eins strebt. Der γ_E -Wert ist dann eine Funktion des zweiten Gliedes in der Klammer, das erst für hinreichend große Werte der Belich-

tung und damit der Schwärzung Null wird. Die Konvergenz von γ_E gegen einen bestimmten Wert, der stets kleiner als S_0/S_D ist, bei wachsender Schichtdicke wird in Abb. 5 von [1] gezeigt.

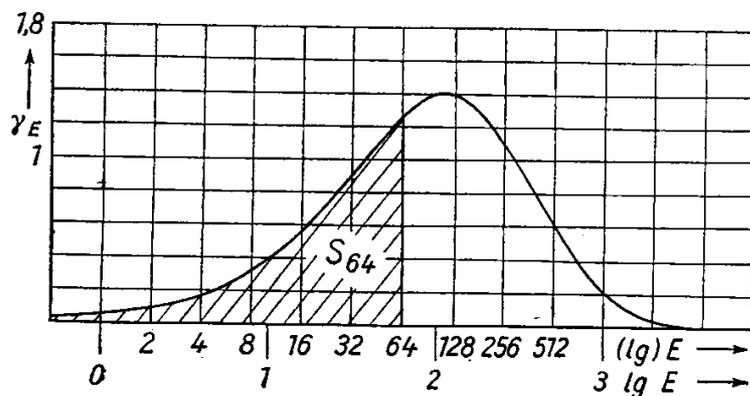


Abb. 6. Darstellung von $\gamma_E = f(E, t, S_0, S_D)$ bei festem t , S_0 und S_D zu Abb. 1. Ermittlung der Schwärzung von $E = 64$ durch graphische Integration. Es ergibt sich in guter Übereinstimmung mit Abb. 1 und Abb. 3 $S_{64} = 0,81$.

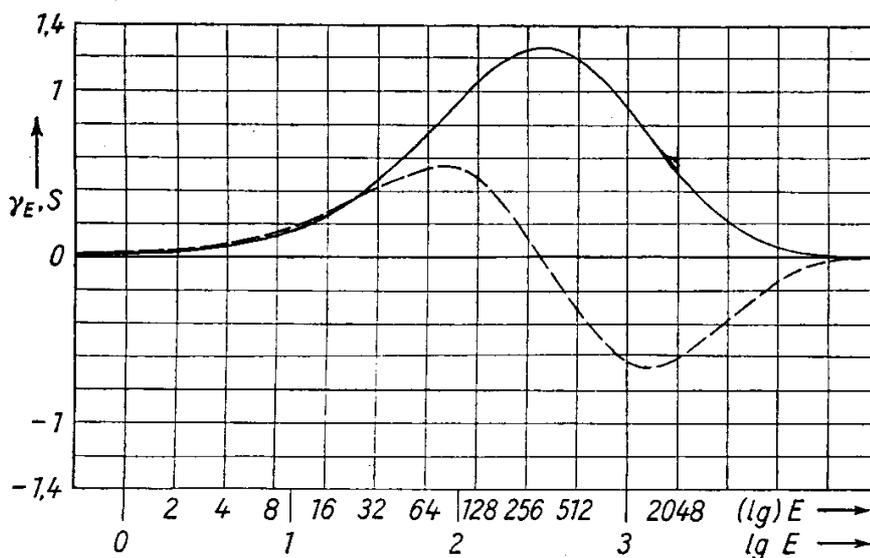


Abb. 7. γ_E -Kurve und Schwärzungskurve des Solarisationseffektes; Daten: $S_0 = 2$, $p = p_s = 1$, $\varepsilon = 0,01$, $\varepsilon_s = 0,001$, $D = 500 \text{ cm}^{-1}$, $x_0 = 20 \mu\text{m}$, $S_D = 1$, $n = n_s = 1$, $t = 1$

Mit Hilfe von Gl. (38) bzw. Gl. (33) ist es nun möglich, bei Kenntnis des Verlaufes von $\gamma_E = f(E, t, S_0, S_D)$ ungeachtet der evtl. Kompliziertheit der Belichtungsfunktion $f(E, t)$ oder der ganzen Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(E, t)$ die Schwärzungskurve durch eine graphische Integration zu gewinnen. Wird auf der Abszisse maßstabsgleich mit der Ordinate $\lg E$ aufgetragen, so ist die Fläche unter der Kurve von Gl. (33) bzw. Gl. (38) in den Grenzen von $-\infty$ bis $\ln E$ zahlenmäßig gleich der Schwärzung bei $\ln E$ (Abb. 6).

Unter Verwendung von Gl. (38) ist auch die halbgraphische Ermittlung solcher komplizierter Schwärzungskurven möglich, die sich nicht elementar berechnen lassen. Die Reduktionswahrscheinlichkeit ist nach [1, Gl. (39)] für den Solarisationseffekt gegeben durch

$$W = \left(1 - 10^{-(\varepsilon_E t^p \cdot 10^{-Dx})^n}\right) 10^{-(\varepsilon_s E t^{p_s} \cdot 10^{-Dx})^{n_s}} \quad (40)$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen von S. 108. Die Größen der Solarisation sind durch den Index s gekennzeichnet.

Die γ_E -Funktion der Solarisation lautet damit:

$$\gamma_E = \frac{S_0}{S_D} \left[\left(1 - 10^{-(\varepsilon_E t^p)^n}\right) \cdot 10^{-(\varepsilon_s E t^{p_s})^{n_s}} - \left(1 - 10^{-(\varepsilon_E t^p \cdot 10^{-S_D})^n}\right) \cdot 10^{-(\varepsilon_s E t^{p_s} \cdot 10^{-S_D})^{n_s}} \right] \quad (41)$$

Abb. 7 zeigt die γ_E -Funktion nach Gl. (41) und die daraus durch eine graphische Integration gewonnene Schwärzungskurve.

Durch Vergleich von Abb. 7 mit Abb. 1 erkennt man, daß die Maximalschwärzung in vielen Fällen unter der Sättigungsschwärzung liegen kann.

Für $\varepsilon_s = 0$ erhält man die übliche f -förmige Schwärzungskurve (Abb. 1) ohne Solarisationserscheinung.

5. Rückschlüsse auf die Parameter der Schwärzungsfunktion aus empirischen Schwärzungskurven

Zur Gewinnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(E, t)$, die als die Erzeugende der Schwärzungskurve angesehen werden kann, verfolgt man den hier beschriebenen Gang der Berechnung der Schwärzungskurve nach einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsfunktion rückwärts.

Zu einer experimentell aufgenommenen Schwärzungskurve (Abb. 8) wird mit Hilfe einer graphischen Differentiation die γ_E -Kurve gezeichnet (Abb. 9).

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(E, t)$ nach Gl. (38)

$$W(E, t) = W(E \cdot 10^{-S_D}, t) + \frac{S_0}{S_D} \gamma_E \quad (42)$$

wird erhalten, indem man zu einem bereits bekannten Funktionswert von W bei Fortschreiten auf der Abszisse um den Faktor 10^{-S_D} (bei linearer Teilung der Abszisse) bzw. um den Summanden S_D (bei logarithmischer Teilung der Abszisse) jeweils den dazugehörigen Funktionswert von γ_E , der noch mit dem reziproken Größtwert von γ_E Gl. (16a) multipliziert wird, addiert. Auf diese Weise kann man sukzessiv die gesamte Kurve der Funktion Gl. (42) erfassen. Abb. 10 stellt W als Funktion von E dar. Man erkennt daran den typischen Verlauf einer bis auf einen Sättigungswert ansteigenden (verallgemeinerten) Exponential-

funktion

$$y = 1 - e^{-f(x)}$$

(43)

mit der notorisch positiven monotonen Funktion $f(x)$.

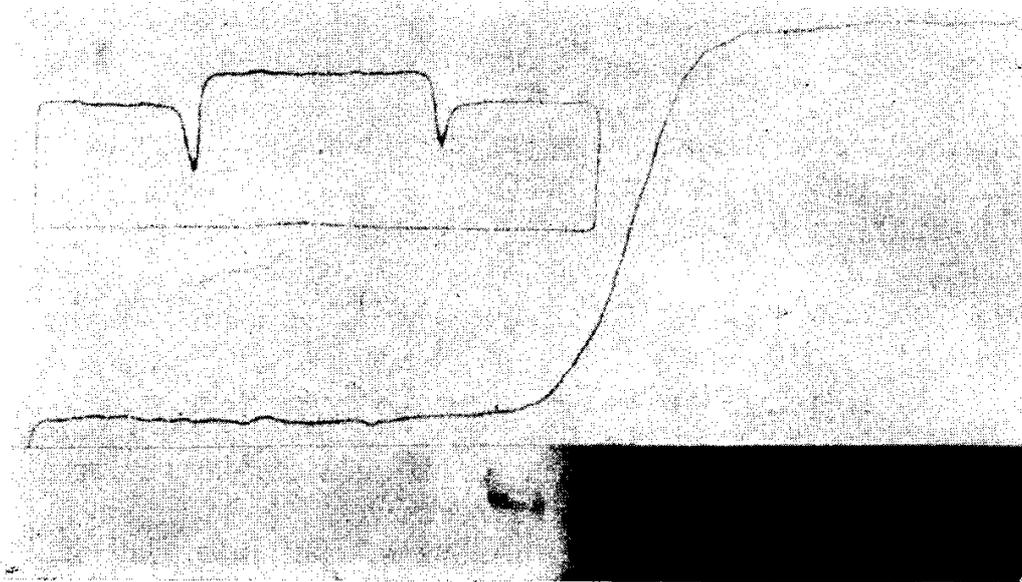


Abb. 8. Äquidensitometrisch gewonnene Schwärzungskurve [3, 6, 7]: Keilkonstante des Graukeils: $D_E = 0,602 \text{ cm}^{-1}$; Material: Vephota hart WH 1, 1781-11-07-64; Belichtungszeit: $t = 1 \text{ min}$; Entwickler: Blautol; unten: dazugehörige $\lg E$ -Schwärzungsfläche. Die Schwärzung der unentwickelten Schicht wurde äquidensitometrisch zu $S_D = 0,20$ bestimmt (links oben). Aus der Abbildung entnimmt man weiterhin $S_0 = 2,40$

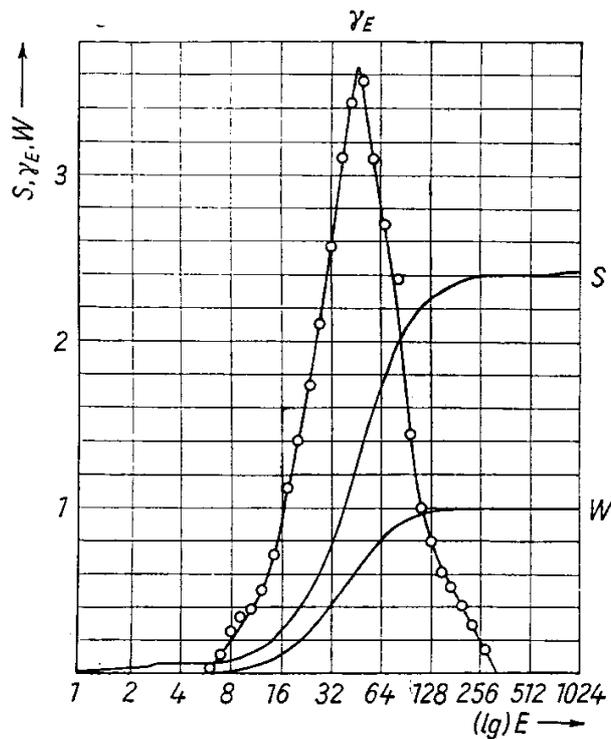


Abb. 9. γ_E -Kurve (γ_E), gewonnen durch graphische Differentiation der empirischen Kurve (S) in Abb.8 und daraus nach Gl.(42) ermittelte Wahrscheinlichkeitsfunktion (W).

Die die Schwärzungskurve erzeugende Wahrscheinlichkeitsfunktion läßt sich (vgl. Gl. 6) für einen Schwarzschild-Bereich folgendermaßen formulieren:

$$W(E, t) = 1 - e^{-(\varepsilon \cdot E t^p)^n}. \quad (44)$$

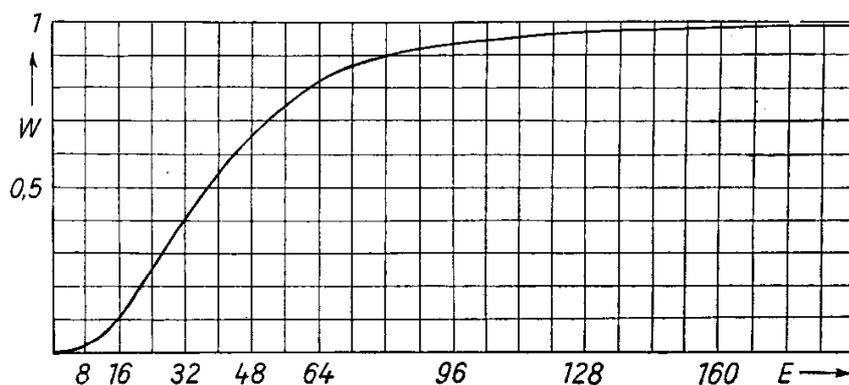


Abb. 10. Die als Erzeugende der Schwärzungskurve in Abb. 8 ermittelte Wahrscheinlichkeitsfunktion in linearer Abhängigkeit von der Intensität

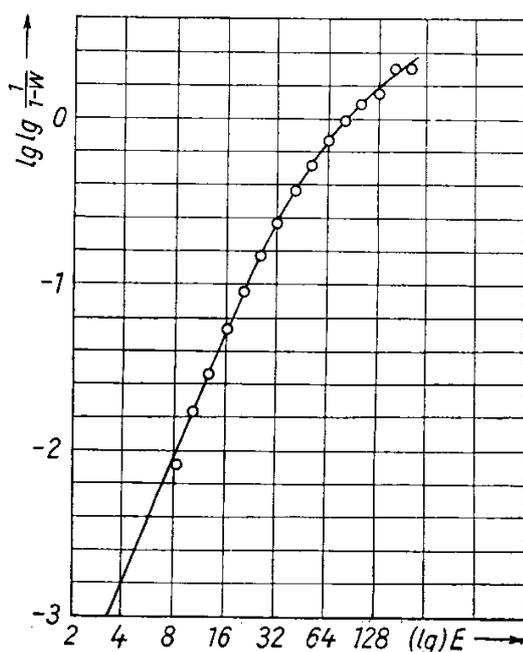


Abb. 11. Geradendarstellung nach Gl. (45) zur Ermittlung von n nach den experimentellen Ergebnissen der Abb. 8. Es ergibt sich für den linearen Teil der Kurve $n = 2,4$

Durch Umformung erhält man hieraus die lineare Gleichung für $\ln E$

$$\lg \lg \frac{1}{1-W} = n \lg E + \lg (\varepsilon t^p)^n, \quad (45)$$

in der die Keimordnungszahl n den Anstieg angibt (Abb. 11).

Ist nach Gl. (45) und Abb. 11 die Keimordnungszahl n ermittelt, so kann bei Kenntnis der zugeordneten Belichtungswerte von $E t^p$ der Empfindlichkeitskoeffizient ε nach

$$\varepsilon = \frac{1}{E t^p} \sqrt[n]{\lg \frac{1}{1-W}} \quad (46)$$

berechnet werden. Hiermit ist eine Möglichkeit zur Definition der Empfindlichkeit einer Emulsion gegeben, die unabhängig von der Schichtdicke und in weiteren Grenzen auch von den Verarbeitungsbedingungen der Photoschicht ist. Soll die Sensibilisierung noch in die Empfindlichkeitsbestimmung miteinbezogen werden, so könnte die Empfindlichkeit der Emulsion auch mit ε^n definiert werden. Die Empfindlichkeitsangabe nach DIN läßt sich aus ε^n und n leicht berechnen, wenn die Größen der Schwärzung der unentwickelten Schicht S_D und die Sättigungsschwärzung S_0 , die man an einer gegebenen Schicht messen kann, bekannt sind. Da nach DIN die Empfindlichkeit durch die Lichtmenge angegeben wird, die auf der verarbeiteten Photoschicht eine Schwärzung über dem Schleier von 0,1 hervorruft, genügt es, hierfür Gl. (17) zu verwenden, die nach dem ersten Gliede der Reihe abgebrochen wird,

$$S \approx S_0 (\varepsilon E t^p)^n \frac{1 - 10^{-n S_D}}{n S_D} \quad (47)$$

Durch Umstellen erhält man aus Gl. (47) eine Beziehung

$$\varepsilon = \frac{1}{E t^p} \sqrt[n]{\frac{n S_D}{1 - 10^{-n S_D}} \frac{S}{S_0}}, \quad (48)$$

die es gestattet, aus den Schwärzungswerten des Durchhanges der Schwärzungskurve mit Kenntnis der Sättigungsschwärzung S_0 den Empfindlichkeitskoeffizienten ε zu berechnen. Vergleicht man Gl. (48) mit Gl. (39), die in Gl. (49) nach ε umgestellt ist,

$$\varepsilon = \frac{1}{(E t^p)_w} \sqrt[n]{\frac{n S_D}{1 - 10^{-n S_D}}}, \quad (49)$$

so findet man, daß nach Gl. (48), die ja nur für den Durchhang näherungsweise gilt, das Verhältnis S/S_0 für den Wendepunkt der Schwärzungskurve Eins betragen würde. Inwieweit Gl. (47) eine brauchbare Näherung für Gl. (12) ist, erkennt man deutlich an Abb. 12, in die die Schwärzungskurve von Abb. 1 und dazugehörige Näherungen nach Gl. (17) eingezeichnet sind.

Nach Gl. (49) ist zur Bestimmung der Empfindlichkeitskonstante nicht die Kenntnis der Sättigungsschwärzung erforderlich, die nach den Ausführungen in 1. die linearen Parameter der Verarbeitung und Nachbehandlung der Schicht mit erfaßt. Somit ermöglicht Gl. (49) eine von den speziellen Verarbeitungs- und Nachbehandlungsbedingungen unabhängige Definition der Empfindlichkeit der photographischen Emulsion. Ähnlich wie bei der Festlegung des Arbeits-

punktes bei Röhrenkennlinien kann die Empfindlichkeit der Emulsion aus der Lage des Wendepunktes der Schwärzungskurve einer speziellen Schicht dieser Emulsion ermittelt werden.

Der Wurzelfaktor in Gl. (49) gibt die Verschiebung des Wendepunktes der Schwärzungskurve auf Grund der Schwärzung der unentwickelten Schicht (Trübung der Emulsion) an. Für Röntgenstrahlen und Kernstrahlen (insbesondere Gammastrahlen) kann die Schicht als durchsichtig angesehen werden, und mit $n = 1$, $p = 1$ und $S_D \rightarrow 0$ geht Gl. (49) in

$$\epsilon^* = \epsilon \ln 10 = \frac{1}{(E t)_w} \quad \text{über.} \quad (50)$$

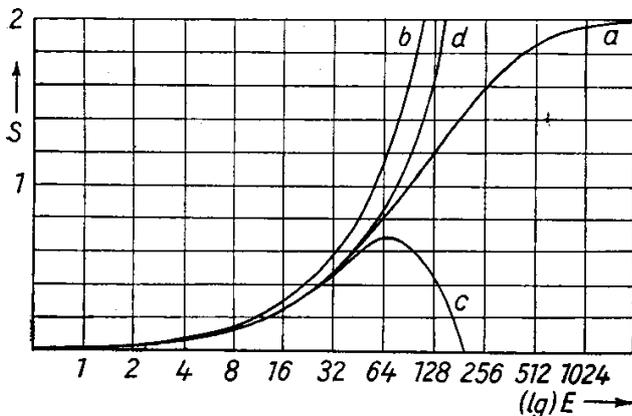


Abb. 12. lgE-Schwärzungskurve (Kurve a) nach Abb. 1 (berechnet nach Gl. (12) und Näherungen nach Gl. (17), die durch Abbruch der Reihe nach dem 1. (Kurve b), nach dem 2. (Kurve c) und nach dem 3. (Kurve d) Gliede erhalten wurden

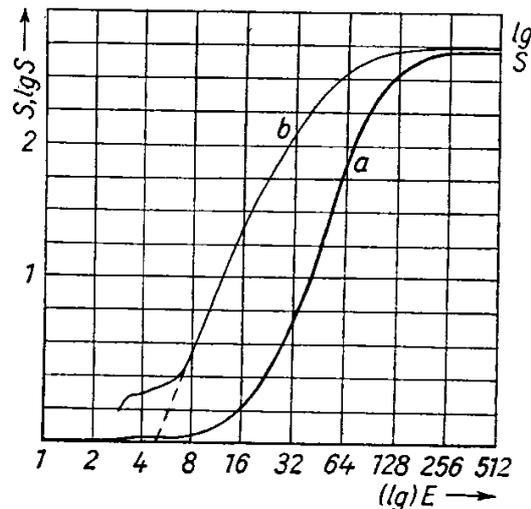


Abb. 13. Übertragung der empirischen lgE-Schwärzungskurve (a) aus Abb. 8 in logarithmische Koordinaten (Kurve b). Zur Verdeutlichung sind beide Kurven mit dem gleichen Abszissenmaßstab übereinandergezeichnet

Diese Reziprozitätsbeziehung zwischen dem Empfindlichkeitskoeffizienten und der Wendepunktsbestrahlung bei Röntgen- und Kernstrahlen ist besonders bemerkenswert, da hierin weder die Parameter der Schicht noch der Verarbeitung und Nachbehandlung enthalten sind.

Für optische Photoschichten ist zur Berechnung des Wurzelfaktors neben S_D noch die Kenntnis der Keimordnungszahl n erforderlich.

Mit Hilfe von Gl. (47) ist die Ermittlung der Keimordnungszahl n aus einer gegebenen lgE-Schwärzungskurve für das Gebiet des Durchhanges besonders einfach. Durch Logarithmieren ergibt sich nämlich aus Gl. (47) die lineare Gleichung

$$\lg S = n \lg E + \text{const.} \quad (51)$$

Trägt man die Schwärzung der empirischen lg E-Schwärzungskurve in Abb. 8 logarithmisch gegen lg E in ein Koordinatensystem ein, so erhält man eine Kurve mit linearem Verlauf im Gebiet des Durchhanges (Abb. 13).

Aus Abb. 13 entnimmt man den Anstieg des geraden Teils der Kurve und damit die Keimordnungszahl $n = 2,5$. Diese gebrochene Keimordnungszahl läßt sich so deuten, daß viele Silberbromidkörner auf Grund des Reifungsprozesses der Emulsion bereits Reifkeime besitzen, so daß diese Keime nicht mehr alle vier Stufen [1] bis zur Entwicklungsfähigkeit zu durchlaufen brauchen. n gibt demnach bei empirischen Schwärzungskurven eine mittlere Keimordnungszahl an.

Der linke Ausläufer der Kurve b in Abb. 13 ist vermutlich auf Ungenauigkeiten in der Wahl des Koordinatenursprunges ($S = 0$) zurückzuführen, die sich wegen des logarithmischen Maßstabes bei kleiner werdenden Schwärzungen immer stärker auswirken. Die Abweichung könnte aber auch auf den Schleier zurückzuführen sein, der wie eine gleichmäßige Vorbelichtung der gesamten Schicht in Rechnung zu setzen ist, die bekanntlich eine Abflachung des Durchhanges der Schwärzungskurve verursacht.

Gl. (51) ermöglicht sicher die am wenigsten aufwendige Bestimmung der Keimordnungszahl n aus dem Durchhang einer Schwärzungskurve, so daß man dieses Verfahren der Bestimmung von n (Abb. 13) im allgemeinen wohl dem Umweg über die Wahrscheinlichkeitsfunktion nach Gl. (44) und Gl. (45) (Abb. 11) vorziehen wird.

Die rechten Seiten von Gl. (45) und Gl. (51) unterscheiden sich nur um den konstanten Summanden $\lg[S_0(1 - 10^{-SD})/n S_D]$. Dennoch sagt Gl. (45) mehr aus als Gl. (51), da sie für die gesamte Schwärzungskurve und nicht nur für das Gebiet des Durchhanges gilt.

Auch Abb. 11 zeigt — wie ebenfalls Abb. 13 — eine Abweichung der Kurve von der Geraden in Richtung höherer Intensitäten bzw. Schwärzungen. Man könnte hieraus folgern, daß n eine Funktion der Belichtung $n = f(E, t)$ bzw. der Schwärzung $n = f(S)$ sei. Zur Erklärung könnte man die Verringerung von n in Richtung höherer Intensitäten auf Grund des inversen Schwarzschild-Effektes [1] heranziehen. Demzufolge müßte aber die Geradenabweichung bei verlängerter Belichtungszeit und somit verringerter Intensität mehr und mehr verschwinden. Das ist aber nicht der Fall. Die Geradenabweichung muß demnach im Aufbau der photographischen Schicht begründet sein; sie ist also nur mittelbar von der Belichtung abhängig. Es ist daher nicht richtig, aus dem Anstieg der Kurve nach Gl. (45) in jedem Schwärzungsbereich auf die Keimordnungszahl zu schließen.

Bisher wurde stillschweigend stets davon ausgegangen, daß alle in der Photoschicht enthaltenen Silberbromidkörner die gleiche a priori-Wahrscheinlichkeit für die Belichtung, die Bildung von Entwicklungskeimen und die nachfolgende Entwicklung besitzen. Darüber hinaus wurde auch die Korngröße und damit der Schwärzungsbeitrag, den die einzelnen Silberbromidkörner nach der Entwicklung liefern, stets als gleich angenommen.

Nach Klein [8] und Lau [9] folgt die Korngrößenverteilung der Silberbromidkörner in der Emulsion einer Gauß-Funktion. Durch Umkristallisation im Reifungsprozeß der Emulsion wachsen offensichtlich die großen Kristalle auf

Kosten der kleinen, so daß daraus schließlich eine einseitige Bevorzugung der großen Körner gegenüber den kleinen Körnern in der Verteilung resultiert. Es ist in diesem Zusammenhang besonders interessant, daß Klein [8] eine Gauß-Verteilung mit logarithmischem Argument des Korndurchmessers fand.

Da nach Trivelli [10] die Empfindlichkeit eines Silberbromidkornes seinem Volumen proportional ist, liefern die größeren und damit empfindlicheren Körner bei der chemischen Entwicklung einen größeren Schwärzungsbeitrag als die kleineren. Mit zunehmender Belichtung treten immer mehr die kleinen Körner mit ihrem geringen Schwärzungsbeitrag in Erscheinung, was im Endergebnis eine Abflachung der „Schulter“ der Schwärzungskurve bedingt. Hierdurch wird im Bereich hoher Schwärzungen vermutlich der aus den empirischen Schwärzungskurven zu entnehmende geringer werdende Anstieg der unter Zugrundelegung von Gl. (45) gezeichneten Kurve verursacht.

Zusammenfassung

Die in einer vorangegangenen Arbeit des Verfassers [1] angegebene Möglichkeit der analytischen Darstellung der Schwärzungskurve wird verallgemeinert und mathematisch weiter ausgebaut.

Es ergibt sich, daß die Schwärzungskurve bei Spezialisierung auf einen Schwarzschild-Bereich und Vernachlässigung der Solarisation, der Regression und der Korngrößenverteilung durch eine Exponentialintegralfunktion darstellbar ist.

Es werden die Bedingungen für die Linearisierung der Schwärzungskurve angegeben. Der γ_E -Wert strebt mit wachsender Schichtdicke einem Grenzwert zu, der sich — in Übereinstimmung mit Angaben von Buisson und Fabry — als Quotient von Sättigungsschwärzung und Schwärzung der unentwickelten Schicht ergibt und der von den Belichtungsparametern unabhängig ist.

Die analytische Darstellung der Schwärzungskurve wird auf beliebige Belichtungsfunktionen, die von dem Schwarzschild'schen Gesetz abweichen, erweitert. Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang eine Belichtungsfunktion [Gl. (27)], die das Schwärzungsverhalten der Schicht im Bereich des normalen und des inversen Schwarzschild-Effektes (näherungsweise) beschreibt.

Es wird nachgewiesen, daß der Ultrakurzzeiteffekt in engem Zusammenhang mit dem inversen Schwarzschild-Effekt steht.

Weiterhin wird ein halbgraphisches Verfahren zur Konstruktion der Schwärzungskurve bei beliebigen Belichtungsfunktionen beschrieben, das in seiner Umkehrung Rückschlüsse auf die Parameter der Schwärzungskurve an Hand empirischen Materials zuläßt. Mit der Kenntnis dieser Parameter ist eine Definition der Empfindlichkeit photographischer Emulsionen möglich, die von der Schichtdicke und in weiten Grenzen auch von den Verarbeitungsbedingungen unabhängig ist.

Die Bestimmung der Keimordnungszahl aus der Gestalt einer empirischen Schwärzungskurve führt zu einer Abweichung von der erwarteten Geraden im Bereich hoher Schwärzungen. Diese Abweichung wird so gedeutet, daß die Korn-

größenverteilung der Silberbromidkristalle in der Photoschicht einen merklichen Einfluß auf die Gestalt der Schwärzungskurve habe.

Für Diskussionen und kritische Hinweise zur Abfassung des Manuskriptes dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. Picht, Herrn Prof. Dr. Schütte, Herrn Dr. Melcher und Herrn Dipl.-Ing. Kröber. Herrn Zemlin sei für die Programmierung von Berechnungen, die mit einer elektronischen Rechenmaschine ausgeführt wurden, gedankt.

Schrifttum

1. Gerth, E., Z. wiss. Phot. **59**, 1 (1965). — 2. Jahnke, E., und F. Emde, Tafeln höherer Funktionen. 5. Auflage. Leipzig 1952. — 3. Kröber, K., und E. Gerth, Bild und Ton **17**, 98, 130 (1964). — 4. Mutter, E., Kompendium der Photographie, 1. Band. Berlin-Borsigwalde 1958, S. 33. — 5. Arens, H., AGFA-Veröff. **3**, 52 (1933); **4**, 15 (1935). — 6. Gerth, E., Dissertation. Potsdam 1965. — 7. Lau, E., und W. Krug, Die Äquidensitometrie. Akademie-Verlag, Berlin 1957. — 8. Klein, E., AGFA-Veröff. Leverkusen/München **2**, 85 (1958). — 9. Lau, E., G. Hess, G. Stutzke und G. Weide, Bild und Ton **17**, 69 (1964). — 10. Trivelli, A. P. H., J. Opt. Soc. Amer. **42**, 467 (1925). — 11. Buisson, H. und C. Fabry, Rev. Optique **3**, 1 (1924).

Anhang: Formelherleitungen

S. 108, Gl. (11) und Gl. (12): Definition des Exponentialintegrals [2]:

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -Ei(-x).$$

S. 110, Gl. (15): Mit Gl. (13) folgt aus Gl. (14):

$$\begin{aligned} S &= S_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n S_{D^*}} [C + \ln(\varepsilon^* E t^p e^{-S_{D^*}})]^n \right\} \\ &= S_0 \left\{ 1 + \frac{1}{S_{D^*}} \ln(\varepsilon^* E t^p) + \frac{C}{n S_{D^*}} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

S. 111, Gl. (16a, b):

$$\frac{\partial S}{\partial \lg E} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{dE}{d \lg E} = \frac{S_0}{S_{D^*}} \frac{\varepsilon^* t^p}{\varepsilon^* E t^p} E \ln 10 = \frac{S_0}{S_D} \quad (16a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lg t} = \frac{\partial S}{\partial t} \frac{dt}{d \lg t} = \frac{S_0}{S_{D^*}} \frac{\varepsilon^* E p t^{p-1}}{\varepsilon^* E t^p} t \ln 10 = p \frac{S_0}{S_D} \quad (16b)$$

S. 111, Gl. (17): Vereinfachte Form des Integrals in Gl. (8) mit den Konstanten a und b:

$$I = \int_0^{x_0} e^{-a e^{-bx}} dx$$

Substitution: $a e^{-bx} = u \quad dx = -\frac{1}{b u} du$

$$I = -\frac{1}{b} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u}}{u} du = -\frac{1}{b} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} \left(1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} - + \dots \right) du$$

$u_1 = a \quad u_2 = a e^{-b x_0}.$

Die alternierende Reihe im Integranden ist im Bereich $0 \leq u \leq \infty$ gleichmäßig konvergent und kann daher gliedweise integriert werden; denn es existiert für $u \rightarrow \infty$ der Grenzwert $C = 0,577215665\dots$ (Eulersche Konstante).

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{b} \left[\ln u - u + \frac{u^2}{2!2} - \frac{u^3}{3!3} + \frac{u^4}{4!4} - + \dots \right]_{u_1}^{u_2} \\ &= \frac{1}{b} \left[\ln a - a + \frac{a^2}{2!2} - + \dots - (\ln a - b x_0) + a e^{-b x_0} - \frac{a^2 e^{-2b x_0}}{2!2} + \dots \right] \\ &= x_0 - \frac{a}{b} (1 - e^{-b x_0}) + \frac{a^2}{2!2b} (1 - e^{-2b x_0}) + \frac{a^3}{3!3b} (1 - e^{-3b x_0}) + \dots \end{aligned}$$

Wiedereinsetzen von

$$a = (\varepsilon^* E t^p)^n$$

und

$$b = n D^*$$

in Gl. (8) ergibt mit (9a, b, c) Gl. (17).

S. 112, Gl. (19):

Gl. (19) folgt aus Gl. (17) durch Anwendung der Regel von Bernoulli-Hospital ($S_D \rightarrow 0$) oder durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion.

S. 113, Gl. (26):

$$E e^{-D^* x} = \varphi(u, t) \quad (25)$$

$$x = -\frac{1}{D^*} \ln \left[\frac{1}{E} \varphi(u, t) \right]$$

$$dx = -\frac{1}{D^*} \frac{1}{\varphi(u, t)} \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial u} du$$

S. 113, Gl. (29):

$$u = \left(\sqrt[1]{1 + a E e^{-D^* x}} - 1 \right)^n t^{n-1} \quad (28)$$

$$E e^{-D^* x} = \varphi(u, t) = \frac{1}{a} \frac{u^{\frac{1}{n}}}{t^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{u^{\frac{1}{n}}}{t^{1-\frac{1}{n}}} + 2 \right)$$

$$\frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial u} = \frac{2}{a n} \frac{1}{u} \frac{u^{\frac{1}{n}}}{t^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{u^{\frac{1}{n}}}{t^{1-\frac{1}{n}}} + 1 \right)$$

$$\frac{1}{\varphi(u, t)} \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial u} = \frac{1}{u} \frac{u^{\frac{1}{n}} + t^{1-\frac{1}{n}}}{u^{\frac{1}{n}} + 2t^{1-\frac{1}{n}}}$$

S. 116, Gl. (33):

Mit einem in Analogie zu dem Exponentialintegral [2] definierten „Schwärzungintegral“

$$SI(-u) = - \int_u^\infty \frac{e^{-z}}{\varphi(z, t)} \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} dz$$

läßt sich Gl. (26) — vgl. dazu Gl. (12) — schreiben:

$$S = S_0 \left\{ 1 + \frac{1}{S_{D^*}} [SI(-f(E e^{-S_{D^*}}, t)) - SI(-f(E, t))] \right\}$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(x) dx = -f(a)$$

ist

$$\frac{\partial SI(-u)}{\partial u} = \frac{e^{-u}}{\varphi(u, t)} \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial u}$$

$$\gamma_E = \frac{\partial S}{\partial \lg E} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{dE}{d \lg E} = \frac{\partial S}{\partial E} E \ln 10$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{S_0}{S_{D^*}} \left[\frac{e^{-u_2}}{\varphi(u_2, t)} \frac{\partial \varphi(u_2, t)}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial E} - \frac{e^{-u_1}}{\varphi(u_1, t)} \frac{\partial \varphi(u_1, t)}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial E} \right]$$

Aus Gl. (24) und Gl. (25) entnimmt man für die Grenzen in Gl. (23) von 0 und x_0 :

$$\begin{aligned} u_1 &= f(E, t) & \varphi(u_1, t) &= E \\ u_2 &= f(E e^{-S_{D^*}}, t) & \varphi(u_2, t) &= E e^{-S_{D^*}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(u_1, t)}{\partial E} = 1$$

$$\frac{\partial \varphi(u_2, t)}{\partial E} = e^{-S_{D^*}}$$

Einsetzen dieser Gleichungen in die obige Beziehung für γ_E liefert Gl. (33). S. 117, Gl. (39):

Mit $\frac{\partial \gamma_E}{\partial E} = 0$ folgt zunächst aus Gl. (33)

$$\frac{\partial f(E e^{-S_{D^*}}, t)}{\partial E} e^{-f(E e^{-S_{D^*}}, t)} = \frac{\partial f(E, t)}{\partial E} e^{-f(E, t)},$$

und für einen Schwarzschild-Bereich, für den

$$f(E, t) = (\varepsilon^* E t^p)^n \quad \text{ist,}$$

gilt dann

$$e^{-n S_{D^*}} e^{-(\varepsilon^* E e^{-S_{D^*}} t^p)^n} = e^{-(\varepsilon^* E t^p)^n},$$

$$(\varepsilon^* E t^p)^n (1 - e^{-n S_{D^*}}) = n S_{D^*},$$

$$E_w = \frac{1}{\varepsilon^* t^p} \sqrt[n]{\frac{n S_{D^*}}{1 - e^{-n S_{D^*}}}} = \frac{1}{\varepsilon t^p} \sqrt[n]{\frac{n S_D}{1 - 10^{-n S_D}}}. \quad (39)$$

Bei der Redaktion eingegangen: 19. Febr. 1966

Anschrift des Verfassers: 15 Potsdam, Pädagogische Hochschule, Institut für Physik, Alt Isotopentechnik